

Lista de exercícios - Semana 1

- Um agricultor acabou de comprar uma fazenda para o plantio de trigo e arroz. A área total disponível para plantio é de 7 hectares, e o agricultor deseja plantar, no mínimo, 1 hectare de trigo e 2 hectares de arroz. Estima-se que o lucro do trigo seja de R\$ 5.000,00 e do arroz de R\$ 3.000,00, por hectare plantado. O agricultor deseja determinar quanto plantar de cada cultura, de modo a maximizar seu lucro.
- Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de Cobre, Zinco e Chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R\$ por ton)

- Uma fábrica produz utensílios de metal. São feitos 3 produtos por meio de 3 operações (estamparia, perfuração e montagem), sendo que cada operação possui um limite máximo de horas disponíveis. A fabricação dos produtos 2 e 3 consome um material que está disponível em quantidades limitadas em estoque. A disponibilidade do material e de horas em cada operação, bem como o quanto cada unidade produzida consome desses recursos são descritos na seguinte tabela:

Setor	Taxa de produção (h/unid)			Recurso disponível
	Prod 1	Prod 2	Prod 3	
Estamparia	0,03	0,15	0,10	400 h
Perfuração	0,06	0,12	0,10	400 h
Montagem	0,05	0,10	0,12	500 h
Material	—	2,0	1,2	2000m ²

A fábrica fez um levantamento de qual o custo unitário e o preço de venda adequado para cada produto, bem como uma estimativa para o mínimo e máximo de vendas, sendo:

	Produto 1	Produto 2	Produto 3
Preço unitário	10	25	20
Custo unitário	6	15	14
Mínimo vendas	1000	—	100
Máximo vendas	6000	500	1000

Deseja-se determinar quanto fabricar de cada produto, de modo a maximizar o lucro.

- Uma fábrica de alimentos deseja produzir um novo sabor de barra de cereais. Os requisitos nutricionais exigem que as barras tenham certas quantidades mínimas e máximas de certos nutrientes principais, sendo: no mínimo 22% de fibra e 7% de proteína; e no máximo 55% de carboidrato e 8% de gorduras. Para produzir as barras, a fábrica usará como ingredientes, farinha de cereais, mel, soja e banana. As proporções de nutrientes em cada ingrediente, bem como os custos por quilograma de cada ingrediente são apresentados na tabela a seguir.

Nutrientes	Ingredientes				Barra
	Cereais	Mel	Soja	Banana	
Fibra	0,26	0,01	0,25	0,10	0,22
Proteína	0,05	0,05	0,26	0,02	0,07
Carboidrato	0,60	0,75	0,45	0,24	0,55
Gorduras	0,07	–	0,01	0,01	0,08
Custos (R\$/kg)	5,20	6,80	7,10	2,50	

A fábrica deseja determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir 1 kg da barra de cereais que satisfaça às restrições nutricionais e tenha custo mínimo.

5. Uma fabricante de bebidas possui dois centros de produção: um em Ribeirão Preto-SP e outro em Cariacica-ES. A empresa deseja planejar qual a melhor forma de atender a demanda para a próxima semana, de mercados consumidores em três capitais: São Paulo, Belo Horizonte e Rio de Janeiro. O custo unitário de se transportar 1 fardo de bebida de cada centro de produção a cada mercado consumidor é dado na tabela a seguir, juntamente com as demandas de cada mercado e as quantidades disponíveis em cada centro de produção:

Custos (R\$/unid)	SP	BH	RJ	Disponível
Ribeirão Preto	3,70	4,30	6,10	1100 unid
Cariacica	9,80	6,90	2,10	1800 unid
Demanda (unid)	960	510	895	

A empresa deseja determinar como atender a demanda de cada mercado consumidor, minimizando os gastos totais com transporte.

6. Um modelo de otimização é, em geral, definido como:

minimizar _____ sujeito a _____,

sendo:

- x : _____
- \mathcal{X} : _____
- $f(x)$: _____
- Uma solução \bar{x} é *factível* quando _____
Caso contrário, \bar{x} é _____
- Uma solução \bar{x} é *ótima* quando ela é _____ e resulta no _____ da função objetivo, i.e. _____.
- Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é _____.
- Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que _____, então o problema é _____.
- Nos dois últimos casos, _____ solução ótima.

7. Diferencie uma expressão linear de uma não-linear e dê exemplos. Quais as propriedades de um problema de programação linear?

8. Para os problemas a seguir, represente a região factível em um gráfico, indicando os pontos extremos, vetor gradiente, solução ótima e valor ótimo.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) min} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
 \text{s.a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
 & -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \text{(b) min} & f(x_1, x_2) = 0,3x_1 + 0,9x_2 \\
 \text{s.a} & x_1 + x_2 \geq 800 \\
 & 0,21x_1 - 0,30x_2 \leq 0 \\
 & 0,03x_1 - 0,01x_2 \geq 0 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{array}$$

9. Coloque os problemas a seguir na forma padrão. Em seguida, escreva-os usando notação matricial, especificando os vetores e matrizes usados.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) max} & f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 7 \\
 & 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 \leq 5 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \text{ livre.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \text{(b) max} & f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\
 \text{s.a} & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \\
 & 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 5 \\
 & -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -4 \\
 & x_1 \geq -2, 0 \leq x_2 \leq 4, x_3 \geq 0.
 \end{array}$$

10. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll}
 \text{min} & -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
 \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{array}$$

- Escreva-o em notação matricial, mostrando explicitamente suas matrizes e vetores;
- Escreva a solução geral do sistema de equações e a solução básica para a base $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$. A solução básica obtida é factível?
- Escreva a solução geral do sistema de equações e a solução básica para a base $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$. A solução básica obtida é factível?