Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção – PPGEP
Disciplina: Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Lista de exercícios - Semana 2

1. Obtenha o problema dual associado a cada um dos problemas de programação linear a seguir, usando a tabela de conversão primal-dual:

(a)
$$\begin{aligned} \min \quad & 15x_1 + 12x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Determine o problema dual correspondente e encontre a solução ótima dual *usando solução gráfica*;

(b) A partir da solução ótima dual encontrada no item anterior, determine uma solução ótima para o problema primal (sem resolvê-lo diretamente). [Dica: use o *Teorema das folgas complementares*]

3. Considere o problema de programação linear abaixo. Determine o problema dual correspondente e uma solução ótima, sabendo-se que $x^* = (1, 0, 1)$ é uma solução ótima do problema abaixo.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2, x_3) = 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Usando apenas teoria Lagrangiana, determine o problema dual do seguinte problema de programação linear, passo-a-passo, sem usar a forma padrão nem a tabela de conversão:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \text{ livre.} \end{aligned}$$

5. Mostre que o par primal-dual de problemas a seguir satisfaz o Lema de Farkas.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & p_1 + 3p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + 2p_2 = 1 \\ & p_1 + 2p_2 = 2 \end{aligned}$$

6. A empresa TudoLimpo fabrica três tipos de amaciantes: super, extra e comum. O preço de venda por kg de amaciante super, extra e comum é de R$ 5, R$ 4 e R$ 3, respectivamente. Cada produto requer 3 tipos de operações. Os tempos de processamento de cada operação por kg de amaciante super são 6, 3 e 4 minutos, respectivamente. Para o amaciante extra, são necessários 4, 6 e 10 minutos para cada operação. Já para o amaciante comum, são necessários 2, 3 e 4 minutos para cada operação. O tempo total disponível para cada operação é de 240, 180 e 200 minutos, respectivamente. Responda as questões a seguir, **justificando** suas respostas.

   (a) Elabore um modelo de programação linear para determinar quanto produzir de cada amaciante de modo a maximizar a receita total. Resolva o modelo por um software de otimização e apresente sua solução ótima e valor ótimo;

   (b) Descreva a interpretação econômica relacionada à dualidade e obtenha o problema dual **a partir dessa interpretação**. Resolva o problema dual por um software de otimização e apresente sua solução ótima e valor ótimo.

   (c) Relacione as soluções ótimas e valores ótimos dos problemas primal e dual dos itens anteriores.

7. Uma empresa do setor de laticínios fabrica os seguintes produtos: iogurte, queijo minas, queijo muçarela e queijo parmesão. Para a fabricação de cada produto, são usados três tipos de matérias-primas: leite, soro e gordura. A tabela a seguir apresenta as disponibilidades diárias de matérias-primas, as quantidades necessárias para a fabricação de 1 kg de cada produto e os lucros de cada produto.

Produto	Leite (L)	Soro (L)	Gordura (kg)	Lucro (R$/kg)
Iogurte	0,70	0,16	0,25	0,80
Queijo minas	0,40	0,22	0,33	0,70
Queijo muçarela	0,40	0,32	0,33	1,15
Queijo parmesão	0,60	0,19	0,40	1,30
Qtd disponível	1200	460	650	

A disponibilidade de mão-de-obra também é limitada: 170 horas-homem/dia. Para a fabricação de 1 kg de iogurte, queijo minas, muçarela e parmesão são necessárias 0,05, 0,12, 0,09 e 0,04 horas-homem, respectivamente. Devido a razões contratuais, a empresa necessita produzir uma quantidade mínima diária de 320 kg de iogurte, 380 kg de queijo minas, 450 kg de muçarela e 240 kg de parmesão.

   (a) Faça um modelo de programação linear para determinar o quanto produzir de cada produto, de modo a maximizar o lucro total;

   (b) Obtenha o problema dual correspondente usando interpretação econômica.

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Primal max $\Rightarrow$ Dual min					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≤ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≥ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre