Universidade Federal de São Carlos – UFSCar
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção – PPGEP
Disciplina: Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Lista de exercícios - Semana 7

1. Um empresário está fazendo um planejamento para os próximos três anos. Ele tem disponível R$ 25 milhões para investir anualmente e cinco projetos estão sob consideração. A tabela a seguir apresenta os retornos esperados para cada projeto ao final do terceiro ano e os desembolsos anuais.

Projeto	Desembolso (milhões R$) Ano 1	Ano 2	Ano 3	Retorno (milhões R$)
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30

Faça um modelo de programação inteira para determinar quais projetos o empresário deve selecionar, de modo a maximizar o retorno total. Resolva-o por um software de otimização e apresente o valor ótimo e uma solução ótima. Em seguida, elabore restrições para modelar as seguintes exigências (independentes): (a) Não se pode selecionar mais do que três projetos; (b) O projeto 3 deve ser selecionado se o projeto 2 for; (c) O projeto 3 não pode ser selecionado se o 4 for; (d) O projeto 5 deve ser selecionado se o 1 ou o 3 forem; (e) O projeto 5 deve ser selecionado se o 1 e o 3 forem.

2. Uma siderúrgica recebeu um pedido de 25 toneladas de aço. Carbono e Molibdênio devem ser responsáveis por pelo menos 5% e 4% do peso total, respectivamente. O aço pode ser produzido combinando-se três tipos de metal: lingotes de aço, aço de sucata e ligas de aço. Quatro lingotes estão disponíveis para compra. O peso, o custo por tonelada e a porcentagem de Carbono e de Molibdênio de cada lingote são dados na tabela a seguir:

Lingote	Qtd (ton)	Custo (R$/ton)	Carbono (%)	Molibdênio (%)
1	5	150	5	3
2	3	138	4	3
3	4	115	5	4
4	6	75	3	4

A sucata pode ser comprada a R$ 50 por tonelada e contém 3% de carbono e 9% de molibdênio. A tabela a seguir mostra os três tipos de ligas de aço que podem ser compradas (qualquer quantidade em toneladas está disponível).

Liga	Custo (R$ por ton)	Carbono (%)	Molibdênio (%)
1	270	9	6
2	215	7	7
3	186	5	8

(a) Elabore um modelo para minimizar o custo da siderúrgica em atender o pedido. Resolva-o por um software de otimização e descreva a solução ótima e o valor ótimo obtidos;

(b) O fornecedor passou a exigir que os lingotes sejam comprados integralmente, mas pode-se usar apenas parte de seu peso total na mistura final. Por exemplo, caso o lingote 1 seja usado, deve-se comprar as 5 toneladas, mas a quantidade usada pode ser menor que 5. Modifique o modelo do item (a) para satisfazer a nova exigência, resolva-o por um software de otimização e apresente a nova solução ótima.

(c) Modifique o modelo do item (b) para exigir o requisito mínimo de apenas um dos componentes, isto é, deve-se ter pelo menos 5% de carbono ou 4% de molibdênio. Qual a nova solução ótima?

3. Responda às seguintes perguntas, **justificando**.

   (a) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira possui solução ótima, podemos afirmar que o problema de programação inteira também possui solução ótima?

   (b) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira é infactível, podemos afirmar que o problema também é infactível?

   (c) Se um problema de programação inteira é infactível, podemos afirmar que sua relaxação linear também é infactível?

   (d) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira possui infinitas soluções ótimas, podemos afirmar que o problema de programação inteira também possui infinitas soluções ótimas?

   (e) Se a relaxação linear de um problema de programação inteira é ilimitada, podemos afirmar que o problema de programação inteira também é ilimitado?

   (f) Ao aplicar o método *branch-and-bound* a um problema de minimização, como obtemos limitantes inferiores e superiores?

4. Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo pelo método *branch-and-bound* (busca em *profundidade* e ramificação na variável mais fracionária). Use o método gráfico para resolver as relaxações lineares de cada um dos nós.

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 18{,}5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

5. Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo pelo método *branch-and-bound* (busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária). Use um software de otimização para resolver as relaxações lineares de cada um dos nós.

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 5x_1 + 7x_2 \leq 44 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

6. Um alpinista deseja escolher quais objetos carregar na mochila a fim de maximizar a sua utilidade. Para cada possível objeto, o alpinista atribuiu uma utilidade (quanto maior, mais útil), mostrada na tabela abaixo juntamente com o peso de cada objeto. Cada objeto é único, podendo ser levado ou não. O peso máximo que o alpinista pode carregar na mochila é 5 kg.

Objeto	Utilidade	Peso (g)
Barra de cereal	6	200
Água	9	1000
Jaqueta	7	400
Tênis	3	400
Protetor solar	5	200
Garrafas de oxigênio	10	3000
Bússola	2	100
Máquina fotográfica	6	500

   (a) Elabore um modelo de programação inteira que auxilie o alpinista a decidir quais itens carregar de modo a maximizar a utilidade total da mochila;

   (b) Resolva o modelo proposto usando um software de otimização e apresente o valor ótimo e uma solução ótima.

   (c) Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo proposto usando o método *branch-and-bound* com busca em *profundidade* e ramificação na variável mais fracionária. Resolva as relaxações lineares por **inspeção**.

7. Uma fábrica de alimentos possui 3 áreas disponíveis para a instalação de centros de distribuição para atender clientes da região metropolitana de 3 cidades. Devido aos tamanhos das áreas, os potenciais centros de distribuição têm capacidades máximas de armazenamento, conforme mostra a tabela a seguir juntamente com os custos unitários de transporte de cada centro até as cidades e as demandas de cada cidade. Os custos de instalação de centros de distribuição nas áreas 1, 2 e 3 são R$ 12 mil, R$ 15 mil e R$ 11 mil, respectivamente. Elabore um modelo de programação inteira que determine quais áreas utilizar para a instalação dos centros e quais cidades cada centro deve atender, de modo a minimizar os custo totais. Resolva-o por um software de otimização e apresente o valor ótimo e uma solução ótima.

	Custo de transporte (R$)			
	Área 1	Área 2	Área 3	Demanda
Ribeirão Preto	10	15	12	800
São Paulo	17	14	20	1400
S. J. Rio Preto	15	10	11	600
Capacidade	1200	1700	1600	