Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Semana 8: Complexidade de Algoritmos e Classes de Problemas

Objetivos desta semana

- Estudar os conceitos de complexidade computacional, com enfoque em problemas de otimização;
- Conhecer as diferentes classes de problemas e compreender a importância dessas classificações.

Tópicos da Semana 8

8.1. Complexidade de algoritmos de otimização

- `https://www.youtube.com/watch?v=r4THdYvZ0Sg`

8.2. Classes de problemas: $\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$, $\mathcal{NP}$-completo, $\mathcal{NP}$-difícil

- `https://www.youtube.com/watch?v=ApRmVUOOY_o`

Sugestão de leitura

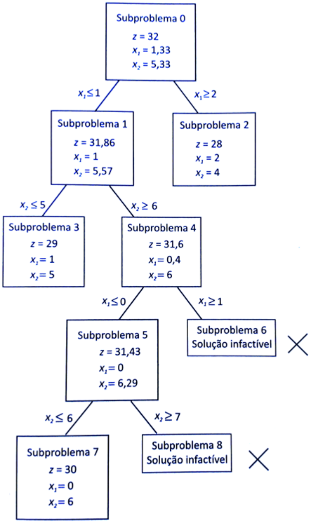
- Nemhauser e Wolsey, 1988, *Integer and Combinatorial Optimization*, Cap. I.5;
- Wolsey, 1998, *Integer Programming*, Cap. 6;
- Tovey, 2002, *Tutorial on Computational Complexity*, Interfaces 32(3): 30–61.

Exercícios resolvidos da Semana 7...

Determine uma solução ótima e o valor ótimo do modelo abaixo pelo método *branch-and-bound* (busca em *largura* e ramificação na variável mais fracionária). Use um software de otimização para resolver as relaxações lineares de cada um dos nós.

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a} \quad & 5x_1 + 7x_2 \leq 44 \\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 27 \\
& 6x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

Exercícios resolvidos da Semana 7...



Exercícios resolvidos da Semana 7...

Um alpinista deseja escolher quais objetos carregar na mochila a fim de maximizar a sua utilidade. Para cada possível objeto, o alpinista atribuiu uma utilidade (quanto maior, mais útil), mostrada na tabela abaixo juntamente com o peso de cada objeto. Cada objeto é único, podendo ser levado ou não. O peso máximo que o alpinista pode carregar na mochila é 5 kg. Faça um modelo de programação inteira que auxilie o alpinista a decidir quais itens carregar.

Objeto	Utilidade	Peso (g)
Barra de cereal	6	200
Água	9	1000
Jaqueta	7	400
Tênis	3	400
Protetor solar	5	200
Garrafas de oxigênio	10	3000
Bússola	2	100
Máquina fotográfica	6	500

Exercícios resolvidos da Semana 7...

- Variáveis de decisão?

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } i \text{ for escolhido,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, 8.$$

- Restrições?

  Peso máximo:

  $$200x_1 + 1000x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 200x_5 + 3000x_6 + 100x_7 + 500x_8 \leq 5000$$

- Função objetivo?

  Maximizar $6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8$

Exercícios resolvidos da Semana 7...

$$\text{max } f(x) = 6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 2x_7 + 6x_8$$

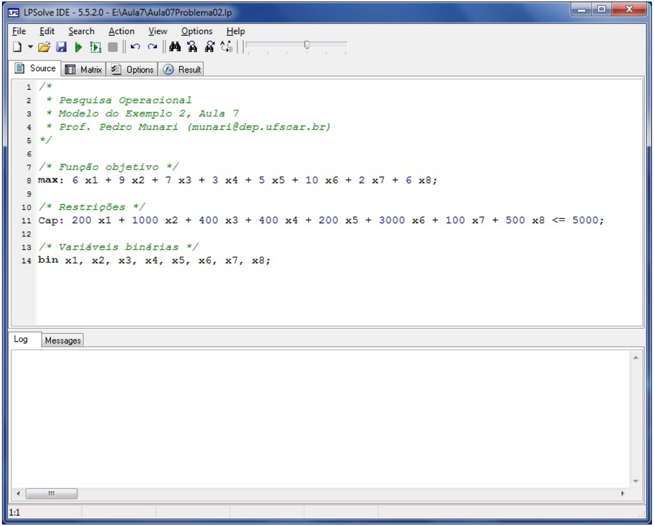
$$\text{s.a} \quad 200x_1 + 1000x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 200x_5 + 3000x_6 + 100x_7 + 500x_8 \leq 5000$$

$$x_1, \ldots, x_8 \in \{0, 1\}$$

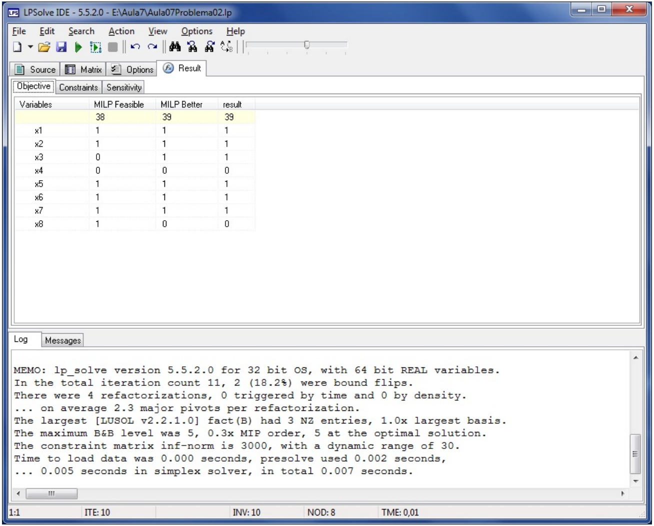
- Problemas como este são chamados de Problema da Mochila.
  De forma geral, são modelados como:

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq b, \\ & x_i \in \{0,1\}, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Exercícios resolvidos da Semana 7...



Exercícios resolvidos da Semana 7...



Variables	MILP Feasible	MILP Better	result
	38	39	39
x1	1	1	1
x2	1	1	1
x3	0	1	1
x4	0	0	0
x5	1	1	1
x6	1	1	1
x7	1	1	1
x8	1	0	0

```
MEMO: lp_solve version 5.5.2.0 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 11, 2 (18.2%) were bound flips.
There were 4 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 2.3 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 3 NZ entries, 1.0x largest basis.
The maximum B&B level was 5, 0.3x MIP order, 5 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 3000, with a dynamic range of 30.
Time to load data was 0.000 seconds, presolve used 0.002 seconds,
... 0.005 seconds in simplex solver, in total 0.007 seconds.
```

Exercícios resolvidos da Semana 7...

Uma fábrica de alimentos possui 3 áreas disponíveis para a instalação de centros de distribuição para atender clientes da região metropolitana de 3 cidades. Devido aos tamanhos das áreas, os potenciais centros de distribuição têm capacidades máximas de armazenamento, conforme mostra a tabela abaixo juntamente com os custos unitários de transporte de cada centro até as cidades e as demandas de cada cidade. Os custos de instalação de centros de distribuição nas áreas 1, 2 e 3 são R$ 12 mil, R$ 15 mil e R$ 11 mil, respectivamente. Elabore um modelo de programação inteira que determine quais áreas utilizar para a instalação dos centros e quais cidades cada centro deve atender, de modo a minimizar os custo totais.

	Custo de transporte (R$)			
	Área 1	Área 2	Área 3	Demanda
Ribeirão Preto	10	15	12	800
São Paulo	17	14	20	1400
S. J. Rio Preto	15	10	11	600
Capacidade	1200	1700	1600	

Exercícios resolvidos da Semana 7...

- Variáveis de decisão?

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se um centro é instalado na área } i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3.$$

$$x_{ij} : \text{ qtd a ser transportada do centro } i \text{ à cidade } j, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

- Restrições?

Demanda 1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 800$

Demanda 2: $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400$

Demanda 3: $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 600$

Exercícios resolvidos da Semana 7...

- Restrições?

  Capacidade área 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1200y_1$

  Capacidade área 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1700y_2$

  Capacidade área 3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1600y_3$

  Não-negatividade: $x_{ij} \geq 0, \; i, j = 1, 2, 3$

  Decisão sim/não: $y_i \in \{0, 1\}, \; i = 1, 2, 3$

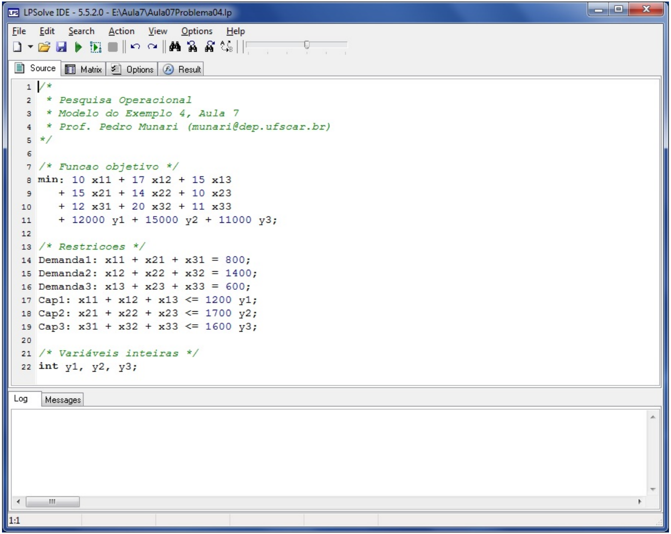
- Função objetivo?

  Minimizar $10x_{11} + 17x_{12} + 15x_{13} + 15x_{21} + 14x_{22} + 10x_{23} +$
  $12x_{31} + 20x_{32} + 11x_{33} + 12000y_1 + 15000y_2 + 11000y_3$

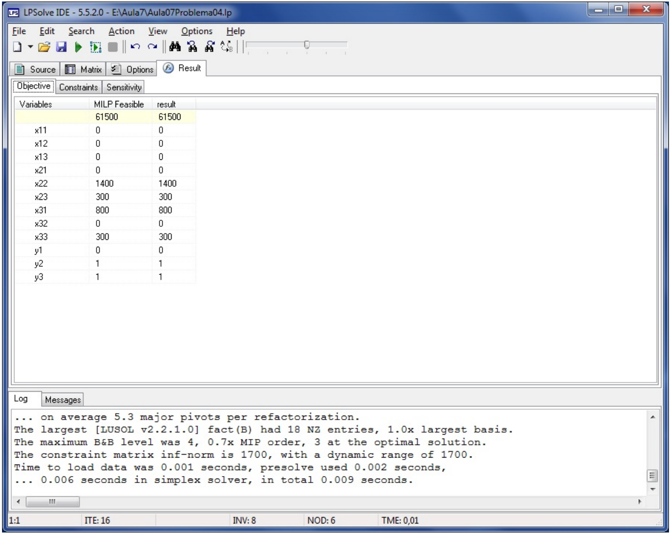
Exercícios resolvidos da Semana 7...

$$
\begin{aligned}
\text{min } f(x,y) = \quad & 10x_{11} + 17x_{12} + 15x_{13} + 15x_{21} + 14x_{22} \\
& +10x_{23} + 12x_{31} + 20x_{32} + 11x_{33} \\
& +12000y_1 + 15000y_2 + 11000y_3 \\
\text{sujeito a} \quad & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 800 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 600 \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1200y_1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1700y_2 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1600y_3 \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i,j = 1,2,3, \\
& y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,2,3.
\end{aligned}
$$

Exercícios resolvidos da Semana 7...



Exercícios resolvidos da Semana 7...



Variables	MILP Feasible	result
	61500	61500
x11	0	0
x12	0	0
x13	0	0
x21	0	0
x22	1400	1400
x23	300	300
x31	800	800
x32	0	0
x33	300	300
y1	0	0
y2	1	1
y3	1	1


```
... on average 5.3 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 18 NZ entries, 1.0x largest basis.
The maximum B&B level was 4, 0.7x MIP order, 3 at the optimal solution.
The constraint matrix inf-norm is 1700, with a dynamic range of 1700.
Time to load data was 0.001 seconds, presolve used 0.002 seconds,
... 0.006 seconds in simplex solver, in total 0.009 seconds.
```

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?