Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 1.2: Introdução à Otimização e Programação Linear

Objetivos deste tópico

- Estudar os conceitos básicos de otimização e suas aplicações;
- Compreender o que é um modelo de otimização e como modelar um problema usando a otimização;
- Conhecer a programação linear, seus conceitos básicos e alguns modelos clássicos;
- Aprender a resolver modelos de programação linear por meio de *softwares*, usando o `lp_solve` e o suplemento *Solver* do Excel.

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\text{minimizar } f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in \mathcal{X}$.
(maximizar)

- x: variável de decisão;

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}} \ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- x: variável de decisão; em geral: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x)\ \text{sujeito a}\ x \in \mathcal{X}.$$

- x: variável de decisão; em geral: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- $\mathcal{X}$: conjunto factível (domínio, restrições);
  Contém todas as *alternativas* viáveis.

Otimização

▷ Definição

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

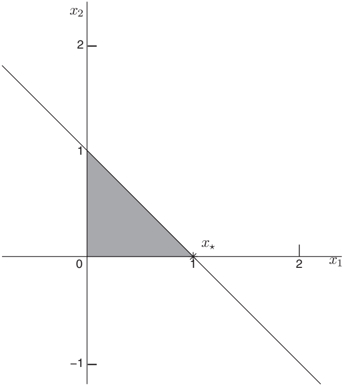
$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- x: variável de decisão; em geral: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- $\mathcal{X}$: conjunto factível (domínio, restrições);
  Contém todas as *alternativas* viáveis.
- $f(x)$: função objetivo; determina o *critério* de escolha.

Otimização

▷ Exemplos

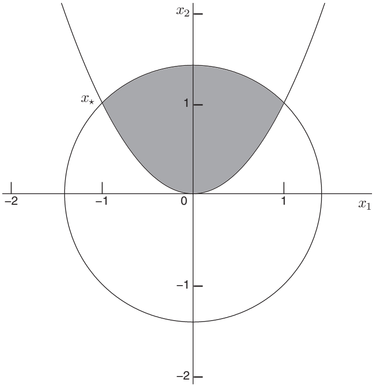
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Otimização

▷ Exemplos

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 \\ \text{s.a} \quad & x_1^2 \leq x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 2. \end{aligned}$$



Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}} \; f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}} \; f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}} \ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in \mathcal{X}$.
(maximizar)

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- Se $\mathcal{X} = \varnothing$, então

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}} \; f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- Se $\mathcal{X} = \varnothing$, então o problema é *infactível*.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in \mathcal{X}$.
(maximizar)

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- Se $\mathcal{X} = \varnothing$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}} \; f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- Se $\mathcal{X} = \varnothing$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$,

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- Se $\mathcal{X} = \varnothing$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$, então o problema é *ilimitado*.

Otimização

▷ Nomenclatura

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in \mathcal{X}$.
(maximizar)

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, i.e., $x \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando ela é factível e resulta no melhor valor da função objetivo, i.e., $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$.
- Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*. Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$, então o problema é *ilimitado*. Em ambos os caso, *não* existe solução ótima.

Otimização

▷ Classificação

Os modelos de otimização podem ser classificados como:

- lineares ou não-lineares;
- contínuos ou discretos;
- determinísticos ou estocásticos.

Modelo de otimização linear x não-linear

- Um modelo linear é descrito por meio de funções, equações e inequações lineares;

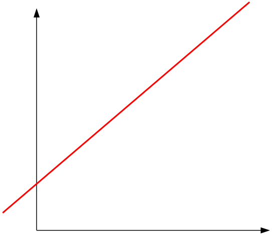
Modelo de otimização linear x não-linear

- Um modelo linear é descrito por meio de funções, equações e inequações lineares;
- Funções lineares são aquelas que variam de forma constante. Podem envolver apenas a soma de variáveis e a multiplicação de variáveis por constantes.

Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções lineares

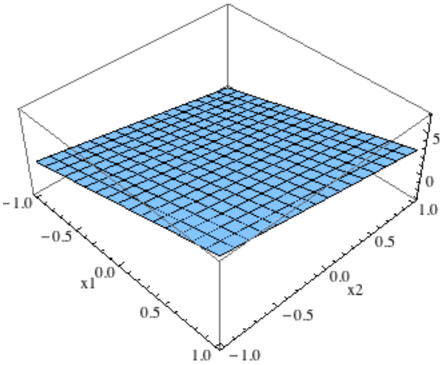
$$f(x) = bx + c$$



Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções lineares

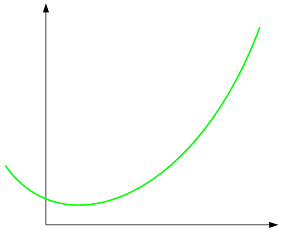
$$f(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2 + 2$$



Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções não-lineares

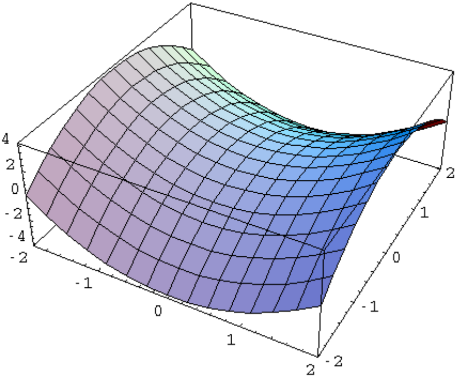
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções não-lineares

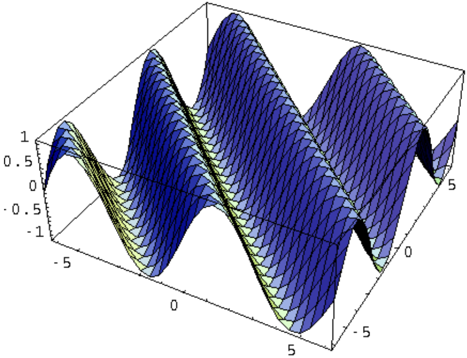
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$



Modelo de otimização linear x não-linear

▷ Funções não-lineares

$$f(x_1, x_2) = \mathsf{sen}(x_1 + x_2)$$



Modelo de otimização linear x não-linear

- Um modelo é contínuo quando seu conjunto factível contém todos os pontos interiores à sua fronteira;

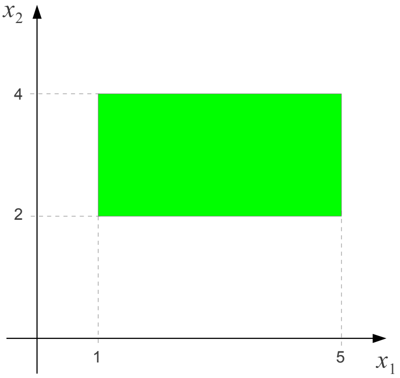
Modelo de otimização linear x não-linear

- Um modelo é contínuo quando seu conjunto factível contém todos os pontos interiores à sua fronteira;
- Em um conjunto factível discreto, os pontos factíveis são isolados no conjunto.

Modelo de otimização contínuo x discreto

▷ Domínio contínuo

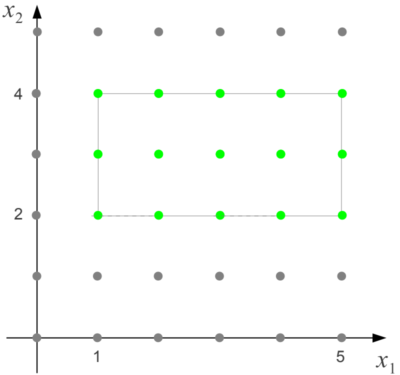
$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1 \leq 5, 2 \leq x_2 \leq 4\}$$



Modelo de otimização contínuo x discreto

▷ Domínio discreto

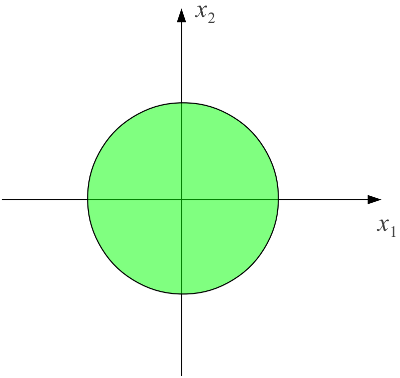
$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq x_1 \leq 5, 2 \leq x_2 \leq 4\}$$



Modelo de otimização contínuo x discreto

▷ Domínio contínuo

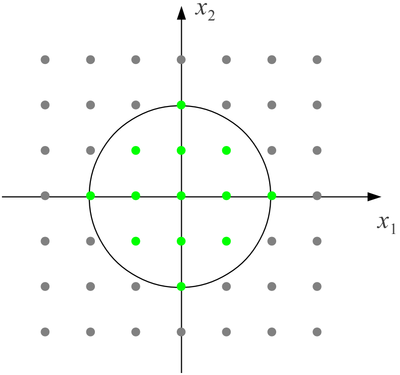
$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$$



Modelo de otimização contínuo x discreto

▷ Domínio discreto

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$$



Modelo de otimização determinístico x estocástico

- Um modelo é determinístico quando os dados de entrada são conhecidos com certeza. Por exemplo: a demanda de um dado produto para os três próximos meses é 170, 185 e 147 unidades;

Modelo de otimização determinístico x estocástico

- Um modelo é determinístico quando os dados de entrada são conhecidos com certeza. Por exemplo: a demanda de um dado produto para os três próximos meses é 170, 185 e 147 unidades;
- Em um modelo estocástico, há incerteza quanto aos dados de entrada. A demanda para os próximos meses não é conhecida, mas são conhecidos possíveis cenários e suas probabilidades de ocorrência.

Otimização

▷ Nomenclatura

- Programação Linear: modelo linear contínuo determinístico;
- Programação Inteira: modelo linear discreto determinístico;
- Programação Estocástica: modelo linear contínuo estocástico;
- Programação Não-linear: modelo não-linear contínuo determinístico;
- ...

Otimização

▷ Métodos de solução

- Para cada tipo de modelo, existem métodos (algoritmos) que podem ser usados para obter uma solução.

Otimização

▷ Métodos de solução

- Para cada tipo de modelo, existem métodos (algoritmos) que podem ser usados para obter uma solução.
- Por exemplo, para obter a solução ótima de um modelo de otimização linear contínuo determinístico (programação linear) podemos usar o *método simplex* ou o *método de pontos interiores*.

Otimização

▷ Métodos de solução

- Para cada tipo de modelo, existem métodos (algoritmos) que podem ser usados para obter uma solução.
- Por exemplo, para obter a solução ótima de um modelo de otimização linear contínuo determinístico (programação linear) podemos usar o *método simplex* ou o *método de pontos interiores*.
- Para modelos de otimização discreta, temos o método branch-and-bound;

Otimização

▷ Métodos de solução

- Para cada tipo de modelo, existem métodos (algoritmos) que podem ser usados para obter uma solução.
- Por exemplo, para obter a solução ótima de um modelo de otimização linear contínuo determinístico (programação linear) podemos usar o *método simplex* ou o *método de pontos interiores*.
- Para modelos de otimização discreta, temos o método branch-and-bound;
- Alguns modelos possuem uma estrutura especial que pode ser explorada por técnicas de reformulação (Dantzig-Wolfe, Lagrangiana, Benders).

Programação Linear

▷ Modelo

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimizar} & f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
\text{sujeito a} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\
& \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Programação Linear

▷ Modelo

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimizar} & f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
\text{sujeito a} & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\
& \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Parâmetros: dados de entrada (números)

Programação Linear

▷ Modelo

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & 1x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 15 \\
& 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 9 \\
& 12x_1 + 9x_2 + 1x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- Modelo de otimização linear contínuo determinístico.

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

- sujeita a um domínio contínuo, representado por um sistema de equações e/ou inequações lineares, p.ex.:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ a_{31}x_1 + \ldots + a_{3n}x_n &\leq b_3 \end{aligned}$$

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

- sujeita a um domínio contínuo, representado por um sistema de equações e/ou inequações lineares, p.ex.:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ a_{31}x_1 + \ldots + a_{3n}x_n & \leq & b_3 \end{array}$$

- Obs.: <u>não</u> é permitido usar '$<$' nem '$>$'.

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$: coeficientes de custo

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$: coeficientes de custo
- $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$: restrição do problema

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$: coeficientes de custo
- $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$: restrição do problema
- $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$: coeficientes do vetor de recursos

Programação Linear

▷ Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$: variáveis de decisão
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$: coeficientes de custo
- $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$: restrição do problema
- $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$: coeficientes do vetor de recursos
- $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$: coeficientes da matriz de recursos

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

- Proporcionalidade: A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor; (constante multiplicando variável)

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

- Proporcionalidade: A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor; (constante multiplicando variável)
- Aditividade: A contribuição total das variáveis é igual à soma direta das contribuições individuais de cada uma; (apenas soma ou subtração entre variáveis)

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

- Proporcionalidade: A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor; (constante multiplicando variável)
- Aditividade: A contribuição total das variáveis é igual à soma direta das contribuições individuais de cada uma; (apenas soma ou subtração entre variáveis)
- Fracionamento: As variáveis podem assumir valores fracionários;

Programação Linear

▷ Propriedades

Um modelo de programação linear deve satisfazer:

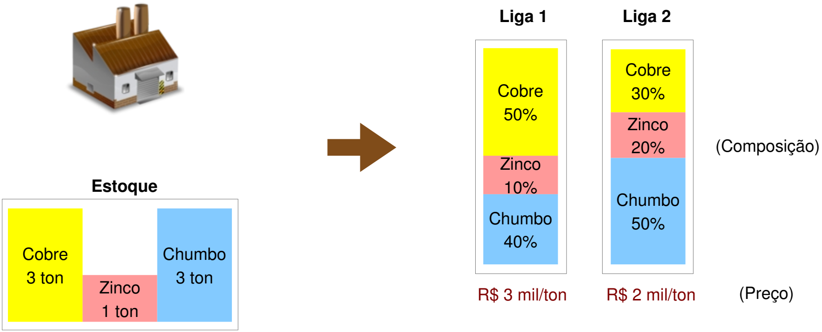
- Proporcionalidade: A contribuição de cada variável é diretamente proporcional ao seu valor; (constante multiplicando variável)
- Aditividade: A contribuição total das variáveis é igual à soma direta das contribuições individuais de cada uma; (apenas soma ou subtração entre variáveis)
- Fracionamento: As variáveis podem assumir valores fracionários;
- Certeza: Todos os dados são determinísticos.

Exemplo

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R$ por ton)

Exemplo


Estoque
Cobre 3 ton
Zinco 1 ton
Chumbo 3 ton
Liga 1
Cobre 50%
Zinco 10%
Chumbo 40%
Liga 2
Cobre 30%
Zinco 20%
Chumbo 50%
(Composição)
R$ 3 mil/ton
R$ 2 mil/ton
(Preço)

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre:

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco:

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1$

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo:

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3$

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3$

  Quantidades não-negativas:

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3$

  Quantidades não-negativas: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3$

  Quantidades não-negativas: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- Função objetivo?

Exemplo

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser produzida da liga i, para $i = 1, 2$.

- Restrições?

  Estoque de cobre: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3$

  Quantidades não-negativas: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

- Função objetivo?

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

Exemplo

▷ Modelagem

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problemas de mix de produção

▷ Exemplo

Uma fábrica produz utensílios domésticos feitos de metal. São feitos 3 produtos por meio de 3 operações (estamparia, perfuração e montagem), sendo que cada operação possui um limite máximo de horas disponíveis. A fabricação dos produtos 2 e 3 consome um material que está disponível em quantidades limitadas em estoque. A disponibilidade do material e de horas em cada operação, bem como o quanto cada unidade produzida consome desses recursos são descritos na seguinte tabela:

	Taxa de produção (horas por unidade)			Recurso
Setor	Produto 1	Produto 2	Produto 3	disponível
Estamparia	0,03	0,15	0,10	400 h
Perfuração	0,06	0,12	0,10	400 h
Montagem	0,05	0,10	0,12	500 h
Material	—	2,0	1,2	2000 m^2

Problemas de mix de produção

▷ Exemplo

A fábrica fez um levantamento de qual o custo unitário e o preço de venda adequado para cada produto, bem como uma estimativa para o mínimo e máximo de vendas, sendo:

	Produto 1	Produto 2	Produto 3
Preço unitário	10	25	20
Custo unitário	6	15	14
Minimo vendas	1000	—	100
Máximo vendas	6000	500	1000

Deseja-se determinar quanto fabricar de cada produto, de modo a maximizar o lucro.

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Montagem:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Montagem: $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Montagem: $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500$

  Material:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Montagem: $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500$

  Material: $2{,}0x_2 + 1{,}2x_3 \leq 2000$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Montagem: $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500$

  Material: $2{,}0x_2 + 1{,}2x_3 \leq 2000$

  Quantidades mínimas e máximas:

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Montagem: $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500$

  Material: $2{,}0x_2 + 1{,}2x_3 \leq 2000$

  Quantidades mínimas e máximas:

  $1000 \leq x_1 \leq 6000$, $0 \leq x_2 \leq 500$, $100 \leq x_3 \leq 1000$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Montagem: $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500$

  Material: $2{,}0x_2 + 1{,}2x_3 \leq 2000$

  Quantidades mínimas e máximas:

  $1000 \leq x_1 \leq 6000$, $0 \leq x_2 \leq 500$, $100 \leq x_3 \leq 1000$

- Função objetivo?

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

- Variáveis de decisão?

  $x_i \rightarrow$ qtd a ser fabricada do produto i, para $i = 1, 2, 3$.

- Restrições?

  Estamparia: $0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Perfuração: $0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400$

  Montagem: $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500$

  Material: $2{,}0x_2 + 1{,}2x_3 \leq 2000$

  Quantidades mínimas e máximas:

  $1000 \leq x_1 \leq 6000$, $0 \leq x_2 \leq 500$, $100 \leq x_3 \leq 1000$

- Função objetivo?

  Maximizar $4x_1 + 10x_2 + 6x_3$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

$$
\begin{array}{rc}
\text{max} & f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\
\text{s.a} & 0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400 \\
& 0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400 \\
& 0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500 \\
& 2{,}0x_2 + 1{,}2x_3 \leq 2000 \\
& 1000 \leq x_1 \leq 6000 \\
& 0 \leq x_2 \leq 500 \\
& 100 \leq x_3 \leq 1000
\end{array}
$$

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período. Determinar quanto produzir de cada produto;

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período. Determinar quanto produzir de cada produto;
- Múltiplos produtos, um período;

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período. Determinar quanto produzir de cada produto;
- Múltiplos produtos, um período;
- Restrições:

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período. Determinar quanto produzir de cada produto;
- Múltiplos produtos, um período;
- Restrições:
  - limitações de recursos;

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período. Determinar quanto produzir de cada produto;
- Múltiplos produtos, um período;
- Restrições:
  - limitações de recursos;
  - previsão de demanda mínima e máxima.

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período. Determinar quanto produzir de cada produto;
- Múltiplos produtos, um período;
- Restrições:
  - limitações de recursos;
  - previsão de demanda mínima e máxima.
- Objetivo:

Problemas de mix de produção

▷ Descrição geral

- Existem vários produtos que a empresa pode produzir num período. Determinar quanto produzir de cada produto;
- Múltiplos produtos, um período;
- Restrições:
  - limitações de recursos;
  - previsão de demanda mínima e máxima.
- Objetivo:
  - maximizar o lucro.

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Parâmetros:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \ldots, K\}$;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \ldots, K\}$;
  - r_i: retorno do produto i;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \ldots, K\}$;
  - r_i: retorno do produto i;
  - c_i: custo unitário do produto i;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \ldots, K\}$;
  - r_i: retorno do produto i;
  - c_i: custo unitário do produto i;
  - b_k: qtd do recurso k;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \ldots, K\}$;
  - r_i: retorno do produto i;
  - c_i: custo unitário do produto i;
  - b_k: qtd do recurso k;
  - a_{ki}: qtd do recurso k para produzir 1 unidade do produto i;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Conjunto de recursos: $\mathcal{R} = \{1, \ldots, K\}$;
  - r_i: retorno do produto i;
  - c_i: custo unitário do produto i;
  - b_k: qtd do recurso k;
  - a_{ki}: qtd do recurso k para produzir 1 unidade do produto i;
  - L_i, U_i: demandas mínima e máxima do produto i.

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

  Limitação do recurso k:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

  Limitação do recurso k: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k$,

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

  Limitação do recurso k: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k$, $k = 1, \ldots, K$;

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

  Limitação do recurso k: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k,\ k = 1, \ldots, K;$

  Demanda do produto i:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

  Limitação do recurso k: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k$, $k = 1, \ldots, K$;

  Demanda do produto i: $L_i \leq x_i \leq U_i$,

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

  Limitação do recurso k: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k$, $k = 1, \ldots, K$;

  Demanda do produto i: $L_i \leq x_i \leq U_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

  Limitação do recurso k: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k$, $k = 1, \ldots, K$;

  Demanda do produto i: $L_i \leq x_i \leq U_i$, $i = 1, \ldots, n$.

- Função objetivo:

Problemas de mix de produção

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd a ser produzida do produto i.

- Restrições:

  Limitação do recurso k: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i \leq b_k$, $k = 1, \ldots, K$;

  Demanda do produto i: $L_i \leq x_i \leq U_i$, $i = 1, \ldots, n$.

- Função objetivo:

  Maximizar o lucro: $\max \sum_{i=1}^{n} (r_i - c_i)x_i$.

Problemas de mix de produção

▷ Modelo algébrico

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \sum_{i=1}^{n} (r_i - c_i) x_i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k, \quad k = 1, \dots, K, \\
& L_i \leq x_i \leq U_i, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo algébrico (usando conjuntos)

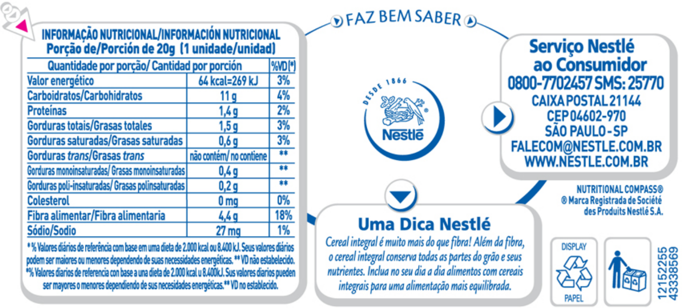
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \sum_{i \in \mathcal{P}} (r_i - c_i) x_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i \in \mathcal{P}} a_{ki} x_i \leq b_k, \quad k \in \mathcal{R}, \\ & L_i \leq x_i \leq U_i, \quad i \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Problemas de mix de produção

▷ Modelo com os dados

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}03x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400 \\
& 0{,}06x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}10x_3 \leq 400 \\
& 0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 \leq 500 \\
& 2{,}0x_2 + 1{,}2x_3 \leq 2000 \\
& 1000 \leq x_1 \leq 6000 \\
& 0 \leq x_2 \leq 500 \\
& 100 \leq x_3 \leq 1000
\end{aligned}$$

Problemas de mistura (*blending*)



INFORMAÇÃO NUTRICIONAL/INFORMACIÓN NUTRICIONAL
Porção de/Porción de 20g (1 unidade/unidad)

Quantidade por porção/ Cantidad por porción		%VD(*)
Valor energético	64 kcal=269 kJ	3%
Carboidratos/Carbohidratos	11 g	4%
Proteínas	1,4 g	2%
Gorduras totais/Grasas totales	1,5 g	3%
Gorduras saturadas/Grasas saturadas	0,6 g	3%
Gorduras *trans*/Grasas *trans*	não contém/ no contiene	**
Gorduras monoinsaturadas/ Grasas monoinsaturadas	0,4 g	**
Gorduras poli-insaturadas/ Grasas polinsaturadas	0,2 g	**
Colesterol	0 mg	0%
Fibra alimentar/Fibra alimentaria	4,4 g	18%
Sódio/Sodio	27 mg	1%

*% Valores diários de referência com base em uma dieta de 2.000 kcal ou 8.400 kJ. Seus valores diários podem ser maiores ou menores dependendo de suas necessidades energéticas. ** VD não estabelecido.
*% Valores diarios de referencia con base a una dieta de 2.000 kcal u 8.400kJ. Sus valores diarios pueden ser mayores o menores dependiendo de sus necesidades energéticas. ** VD no establecido.

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Exemplo

Uma fábrica de alimentos deseja produzir um novo sabor de barra de cereais. Os requisitos nutricionais exigem que as barras tenham certas quantidades mínimas e máximas de certos nutrientes principais, sendo: no mínimo 22% de fibra e 7% de proteína; e no máximo 55% de carboidrato e 8% de gorduras. Para produzir as barras, a indústria usará como ingredientes, farinha de cereais, mel, soja e banana. As proporções de nutrientes em cada ingrediente, bem como os custos por quilograma de cada ingrediente são apresentados na tabela a seguir:

	Ingredientes				
Nutrientes	Cereais	Mel	Soja	Banana	Barra
Fibra	0,26	0,01	0,25	0,10	0,22
Proteína	0,05	0,05	0,26	0,02	0,07
Carboidrato	0,60	0,75	0,45	0,24	0,55
Gorduras	0,07	–	0,01	0,01	0,08
Custos (R$/kg)	5,20	6,80	7,10	2,50	

A fábrica deseja determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir 1 kg da barra de cereais que satisfaça às restrições nutricionais e tenha custo mínimo.

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...
- Restrições:

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...
- Restrições:
  - Garantir as especificações do produto.

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...
- Restrições:
  - Garantir as especificações do produto.
- Objetivos:

Problemas de mistura (*blending*)

▷ Descrição geral

- Misturar diversos ingredientes para produzir um produto com certas especificações de componentes;
- Existem várias combinações possíveis que permitem produzir o produto;
- Exemplos: fabricação de ração, fertilizantes, ligas metálicas, ...
- Restrições:
  - Garantir as especificações do produto.
- Objetivos:
  - Minimizar o custo de produzir uma dada quantidade da mistura.

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Parâmetros:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Componentes: $\mathcal{J} = \{1, \ldots, m\}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Componentes: $\mathcal{J} = \{1, \ldots, m\}$;
  - c_i: custo do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Componentes: $\mathcal{J} = \{1, \ldots, m\}$;
  - c_i: custo do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;
  - a_{ji}: qtd do componente $j \in \mathcal{J}$ em 1 unid do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Parâmetros:
  - Ingredientes: $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$;
  - Componentes: $\mathcal{J} = \{1, \ldots, m\}$;
  - c_i: custo do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;
  - a_{ji}: qtd do componente $j \in \mathcal{J}$ em 1 unid do ingrediente $i \in \mathcal{I}$;
  - b_j: qtd do componente $j \in \mathcal{J}$ exigida na mistura;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:
  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

  Qtd do componente:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$,

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:
  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.
- Restrições:
  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$, $j \in \mathcal{J}$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$, $j \in \mathcal{J}$;

  Produzir 1 unid da mistura:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$, $j \in \mathcal{J}$;

  Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1$;

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:
  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.
- Restrições:
  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$, $j \in \mathcal{J}$;
  Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1$;
  Não-negatividade:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$, $j \in \mathcal{J}$;

  Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1$;

  Não-negatividade: $x_i \geq 0, \; i \in \mathcal{I}$.

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$, $j \in \mathcal{J}$;

  Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1$;

  Não-negatividade: $x_i \geq 0, \; i \in \mathcal{I}$.

- Função objetivo:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j$, $j \in \mathcal{J}$;

  Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1$;

  Não-negatividade: $x_i \geq 0, \; i \in \mathcal{I}$.

- Função objetivo:

  Minimizar o custo:

Problemas de mistura

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_i: qtd do ingrediente $i \in \mathcal{I}$ a ser usado para produzir 1 unid de mistura.

- Restrições:

  Qtd do componente: $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \geq b_j, \; j \in \mathcal{J}$;

  Produzir 1 unid da mistura: $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1$;

  Não-negatividade: $x_i \geq 0, \; i \in \mathcal{I}$.

- Função objetivo:

  Minimizar o custo: $\min \sum_{i \in \mathcal{I}} c_i x_i$.

Problemas de mistura

▷ Modelo algébrico

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{I}} c_i x_i & \\
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{I}} a_{ji} x_i \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\} b_j, & j \in \mathcal{J}, \\
& \displaystyle\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = 1. & \\
& x_i \geq 0, & i \in \mathcal{I}.
\end{array}
$$

Problemas de mistura

▷ Modelo com dados

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = 5.2x_1 + 6.8x_2 + 7.1x_3 + 2.5x_4 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}26x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}10x_4 \geq 0{,}22 \\
& 0{,}05x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}26x_3 + 0{,}02x_4 \geq 0{,}07 \\
& 0{,}60x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}45x_3 + 0{,}24x_4 \leq 0{,}55 \\
& 0{,}07x_1 + 0{,}01x_3 + 0{,}01x_4 \leq 0{,}08 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Problemas de mistura

▷ Modelo com dados

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = 5.2x_1 + 6.8x_2 + 7.1x_3 + 2.5x_4 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}26x_1 + 0{,}01x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}10x_4 \geq 0{,}22 \\
& 0{,}05x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}26x_3 + 0{,}02x_4 \geq 0{,}07 \\
& 0{,}60x_1 + 0{,}75x_2 + 0{,}45x_3 + 0{,}24x_4 \leq 0{,}55 \\
& 0{,}07x_1 + 0{,}01x_3 + 0{,}01x_4 \leq 0{,}08 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.
\end{aligned}
$$

E se quiséssemos produzir Q kg da mistura?

Problemas de transporte

Uma fabricante de bebidas possui dois centros de produção: um em Ribeirão Preto-SP e outro em Cariacica-ES. A empresa deseja planejar qual a melhor forma de atender a demanda para a próxima semana, de mercados consumidores em três capitais: São Paulo, Belo Horizonte e Rio de Janeiro. O custo unitário de se transportar 1 fardo de bedida de cada centro de produção a cada mercado consumidor é dado na tabela a seguir, juntamente com as demandas de cada mercado e as quantidades disponíveis em cada centro de produção:

Custos (R$/unid)	SP	BH	RJ	Disponível
Ribeirão Preto	3,70	4,30	6,10	1100 unid
Cariacica	9,80	6,90	2,10	1800 unid
Demanda (unid)	960	510	895	

A empresa deseja determinar como atender a demanda de cada mercado consumidor, minimizando os gastos totais com transporte.

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- Destino 2:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- Destino 3:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;
- Não-negatividade:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;
- Não-negatividade: $x_{ij} \geq 0$.

Função objetivo?

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;
- Não-negatividade: $x_{ij} \geq 0$.

Função objetivo?

- Minimizar custos:

Problemas de transporte

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: qtd a ser transportada da origem i até o destino j, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

Restrições:

- Origem 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100$;
- Origem 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800$;
- Destino 1: $x_{11} + x_{21} = 960$;
- Destino 2: $x_{12} + x_{22} = 510$;
- Destino 3: $x_{13} + x_{23} = 895$;
- Não-negatividade: $x_{ij} \geq 0$.

Função objetivo?

- Minimizar custos:
  min $3{,}7x_{11} + 4{,}3x_{12} + 6{,}1x_{13} + 9{,}8x_{21} + 6{,}9x_{22} + 2{,}1x_{23}$

Problemas de transporte

▷ Modelo

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = 3{,}7x_{11} + 4{,}3x_{12} + 6{,}1x_{13} \\
& +9{,}8x_{21} + 6{,}9x_{22} + 2{,}1x_{23} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1100 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1800 \\
& x_{11} + x_{21} = 960 \\
& x_{12} + x_{22} = 510 \\
& x_{13} + x_{23} = 895 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0.
\end{aligned}$$

Problemas de transporte

▷ Modelo algébrico

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i, & i = 1, \ldots, n, \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j, & j = 1, \ldots, m, \\
& x_{ij} \geq 0, & i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Solução de problemas com o uso de *software*

Solução de problemas com o uso de *software*

- Existem diversos *softwares* de otimização disponíveis atualmente. Dentre os mais utilizados/conhecidos podemos citar:

Solução de problemas com o uso de *software*

- Existem diversos *softwares* de otimização disponíveis atualmente. Dentre os mais utilizados/conhecidos podemos citar:
  - Excel (Microsoft) – conta com o Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);

Solução de problemas com o uso de *software*

- Existem diversos *softwares* de otimização disponíveis atualmente. Dentre os mais utilizados/conhecidos podemos citar:
  - Excel (Microsoft) – conta com o Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
  - `lp_solve` – simples, didático, livre e gratuito;

Solução de problemas com o uso de *software*

- Existem diversos *softwares* de otimização disponíveis atualmente. Dentre os mais utilizados/conhecidos podemos citar:
  - Excel (Microsoft) – conta com o Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
  - `lp_solve` – simples, didático, livre e gratuito;
  - CPLEX (IBM) – comercial ($$$) e um dos mais eficientes;

Solução de problemas com o uso de *software*

- Existem diversos *softwares* de otimização disponíveis atualmente. Dentre os mais utilizados/conhecidos podemos citar:
  - Excel (Microsoft) – conta com o Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
  - `lp_solve` – simples, didático, livre e gratuito;
  - CPLEX (IBM) – comercial ($$$) e um dos mais eficientes;
  - GLPK – livre, gratuito e pode ser uma boa alternativa aos softwares comerciais.

Solução de problemas com o uso de *software*

- Existem diversos *softwares* de otimização disponíveis atualmente. Dentre os mais utilizados/conhecidos podemos citar:
  - Excel (Microsoft) – conta com o Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
  - `lp_solve` – simples, didático, livre e gratuito;
  - CPLEX (IBM) – comercial ($$$) e um dos mais eficientes;
  - GLPK – livre, gratuito e pode ser uma boa alternativa aos softwares comerciais.
- Em geral, os *softwares* usam o algoritmo simplex para a resolução dos problemas de Programação Linear e variações do método branch-and-bound para a resolução de problemas de Programação Inteira.

Solução de problemas com o uso de *software*

- O Solver/Excel tem como principais vantagens:
  - Estar disponível em quase todo computador;

Solução de problemas com o uso de *software*

- O Solver/Excel tem como principais vantagens:
  - Estar disponível em quase todo computador;
  - Entrada de dados por uma planilha do Excel.

Solução de problemas com o uso de *software*

- O Solver/Excel tem como principais vantagens:
  - Estar disponível em quase todo computador;
  - Entrada de dados por uma planilha do Excel.
- Por outro lado, além limitar o número máximo de variáveis e restrições, pode ser ineficiente até mesmo em problemas relativamente pequenos.

Solução de problemas com o uso de *software*

- O Solver/Excel tem como principais vantagens:
  - Estar disponível em quase todo computador;
  - Entrada de dados por uma planilha do Excel.
- Por outro lado, além limitar o número máximo de variáveis e restrições, pode ser ineficiente até mesmo em problemas relativamente pequenos.
- O `lp_solve` é uma boa alternativa que permite a entrada de dados de forma bastante intuitiva;

Solução de problemas com o uso de *software*

- O Solver/Excel tem como principais vantagens:
  - Estar disponível em quase todo computador;
  - Entrada de dados por uma planilha do Excel.
- Por outro lado, além limitar o número máximo de variáveis e restrições, pode ser ineficiente até mesmo em problemas relativamente pequenos.
- O `lp_solve` é uma boa alternativa que permite a entrada de dados de forma bastante intuitiva;
  - Tem caráter mais didático, embora possa ser usado na resolução de problemas de pequeno porte.

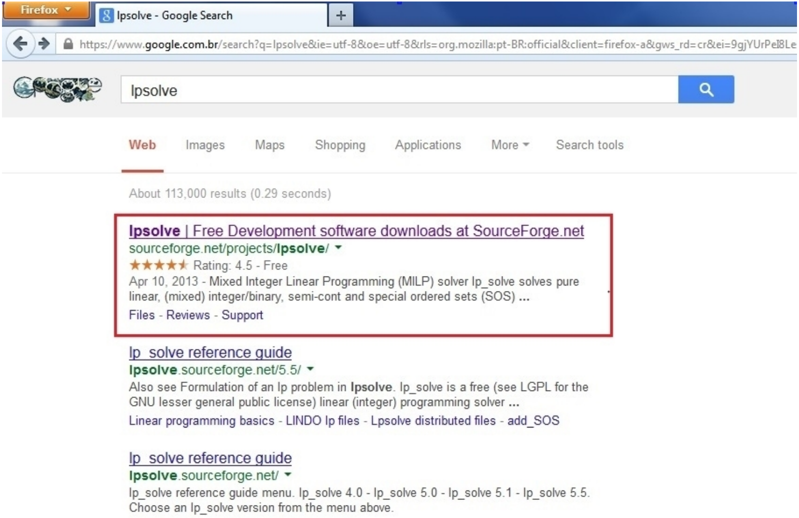
Solução de problemas com o uso de *software*

- Na prática, CPLEX e GLPK são mais apropriados na resolução de problemas de grande porte, embora o uso desses softwares seja bem mais complicado e exija um conhecimento mais avançado de PO e linguagem de programação;

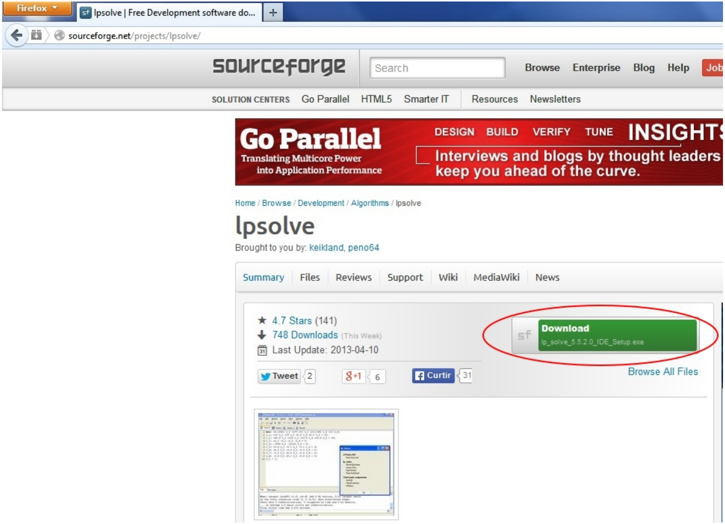
Solução de problemas com o uso de *software*

- Na prática, CPLEX e GLPK são mais apropriados na resolução de problemas de grande porte, embora o uso desses softwares seja bem mais complicado e exija um conhecimento mais avançado de PO e linguagem de programação;
- Algumas linguagens de modelagem com interface gráfica podem facilitar o uso desses softwares, por exemplo OPL, GAMS e AMPL.

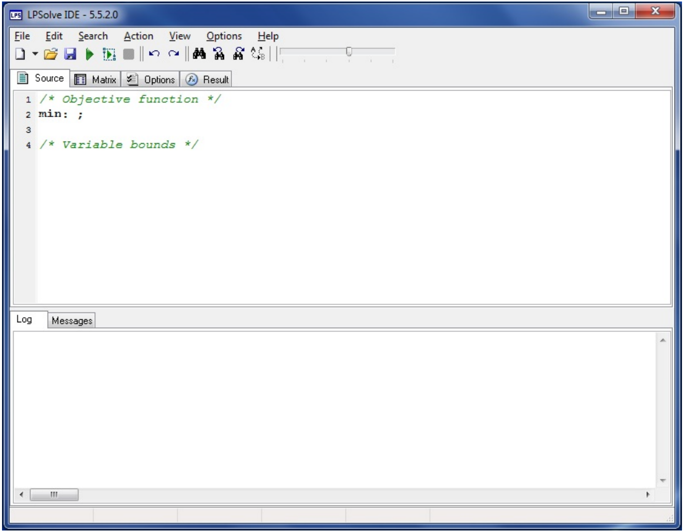
Para baixar e instalar o `lp_solve`:



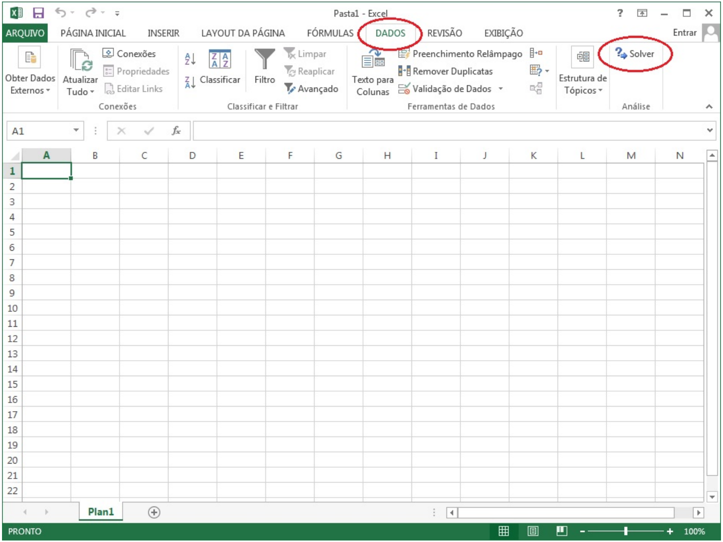
Para baixar e instalar o `lp_solve`:



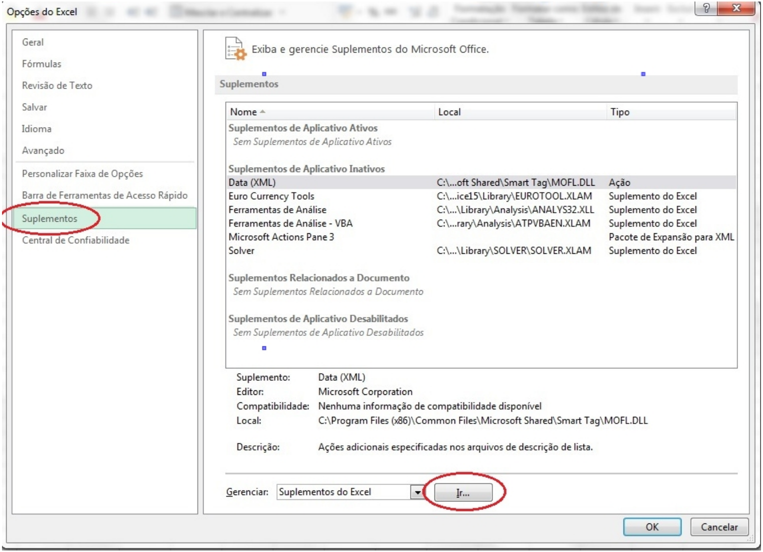
Tela inicial `lp_solve`:



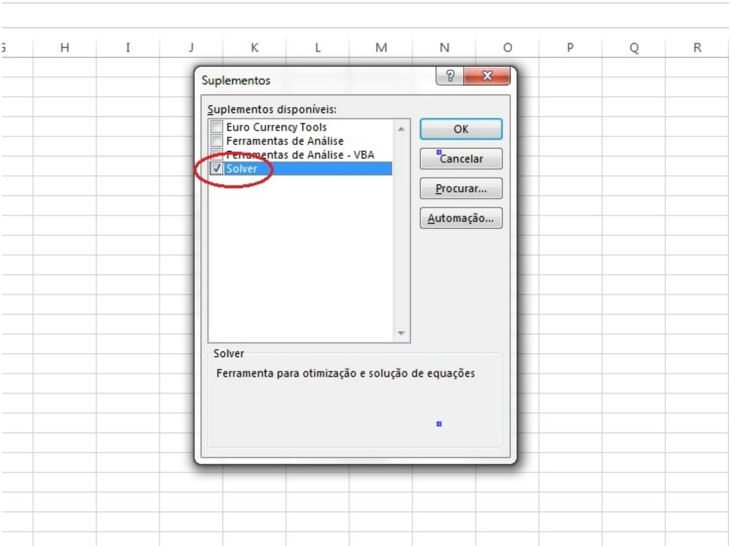
Para usar o Solver/Excel:



Caso não encontre, vá em Arquivo $\gg$ Opções $\gg$ Suplementos $\gg$ Ir:



Selecione a opção Solver e clique em OK:



Solução de problemas com o uso de *software*

- No canal do YouTube estão disponíveis exemplos de como modelar e resolver pelo `lp_solve` e Solver/Excel alguns dos problemas vistos nesta aula:

  `https://www.youtube.com/PedroMunari`

Linguagem de modelagem algébrica (extra)

- Para lidar com problemas de grande porte, é importante que o software permita entrar com o modelo usando alguma linguagem de modelagem algébrica.
- Exemplos: GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc.

Linguagem de modelagem algébrica (extra)

- Para lidar com problemas de grande porte, é importante que o software permita entrar com o modelo usando alguma linguagem de modelagem algébrica.
- Exemplos: GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc.
- Permitem entrar com o modelo na forma algébrica;

Linguagem de modelagem algébrica (extra)

- Para lidar com problemas de grande porte, é importante que o software permita entrar com o modelo usando alguma linguagem de modelagem algébrica.
- Exemplos: GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc.
- Permitem entrar com o modelo na forma algébrica;
- Em geral, devem ser utilizadas dentro de um software de modelagem que tipicamente leva o mesmo nome da linguagem;

Linguagem de modelagem algébrica (extra)

- Para lidar com problemas de grande porte, é importante que o software permita entrar com o modelo usando alguma linguagem de modelagem algébrica.
- Exemplos: GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc.
- Permitem entrar com o modelo na forma algébrica;
- Em geral, devem ser utilizadas dentro de um software de modelagem que tipicamente leva o mesmo nome da linguagem;
- Por exemplo, a linguagem GAMS é usada dentro do software GAMS para modelagem e resolução do problema. O GAMS não resolve o problema, servindo apenas como uma interface que chama outros softwares (p.ex. CPLEX) para a resolução de fato;

Linguagem de modelagem algébrica (extra)

- Para lidar com problemas de grande porte, é importante que o software permita entrar com o modelo usando alguma linguagem de modelagem algébrica.
- Exemplos: GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc.
- Permitem entrar com o modelo na forma algébrica;
- Em geral, devem ser utilizadas dentro de um software de modelagem que tipicamente leva o mesmo nome da linguagem;
- Por exemplo, a linguagem GAMS é usada dentro do software GAMS para modelagem e resolução do problema. O GAMS não resolve o problema, servindo apenas como uma interface que chama outros softwares (p.ex. CPLEX) para a resolução de fato;
- Algumas podem ser usadas no `SolverStudio`, dentro do Excel.

Linguagem de modelagem algébrica

▷ GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

Linguagem de modelagem algébrica

▷ GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

- GMPL é um linguagem de modelagem algébrica criada pela GNU para interação com o GLPK (GNU Linear Programming Kit);

Linguagem de modelagem algébrica

▷ GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

- GMPL é um linguagem de modelagem algébrica criada pela GNU para interação com o GLPK (GNU Linear Programming Kit);
- Pode ser usada por meio do software livre `Gusek`: `http://gusek.sourceforge.net/`

Linguagem de modelagem algébrica

▷ GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

- GMPL é um linguagem de modelagem algébrica criada pela GNU para interação com o GLPK (GNU Linear Programming Kit);
- Pode ser usada por meio do software livre `Gusek`: `http://gusek.sourceforge.net/`
- Há também uma interface web didática e com exemplos: `https://online-optimizer.appspot.com`

Linguagem de modelagem algébrica

▷ GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

- GMPL é um linguagem de modelagem algébrica criada pela GNU para interação com o GLPK (GNU Linear Programming Kit);
- Pode ser usada por meio do software livre `Gusek`: `http://gusek.sourceforge.net/`
- Há também uma interface web didática e com exemplos: `https://online-optimizer.appspot.com`
- E pelo suplemento `SolverStudio`, dentro do Excel;

Linguagem de modelagem algébrica

▷ GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

- GMPL é um linguagem de modelagem algébrica criada pela GNU para interação com o GLPK (GNU Linear Programming Kit);
- Pode ser usada por meio do software livre `Gusek`: `http://gusek.sourceforge.net/`
- Há também uma interface web didática e com exemplos: `https://online-optimizer.appspot.com`
- E pelo suplemento `SolverStudio`, dentro do Excel;
- É um subconjunto da AMPL, uma linguagem comercial ($$$) bastante utilizada, assim pode também ser usada no software AMPL junto com outros softwares comerciais (p.ex. CPLEX).

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R$ por ton)

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

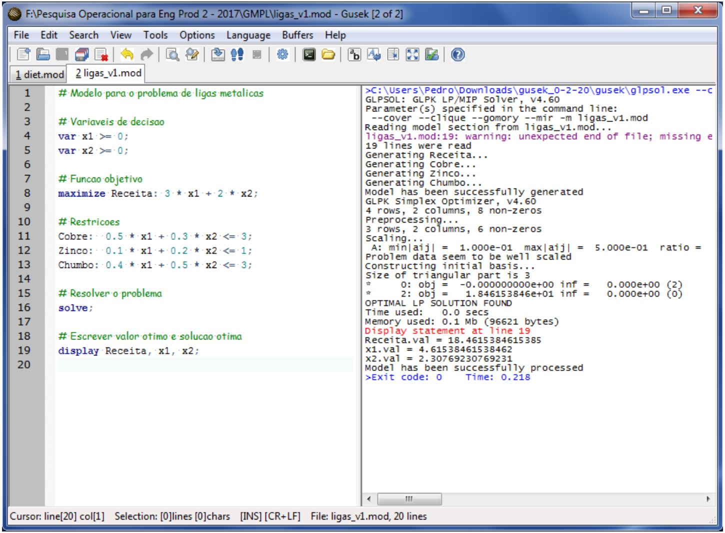
GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Modelo com dados em GMPL

```
# Variaveis de decisao
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;

# Funcao objetivo
maximize Receita: 3 * x1 + 2 * x2;

# Restricoes
Cobre:  0.5 * x1 + 0.3 * x2 <= 3;
Zinco:  0.1 * x1 + 0.2 * x2 <= 1;
Chumbo: 0.4 * x1 + 0.5 * x2 <= 3;

# Resolver o problema
solve;

# Escrever valor otimo e solucao otima
display Receita, x1, x2;
```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Gusek



GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo

- A modelagem anterior explicita os dados diretamente no modelo, semelhante ao que é feito no `lp_solve`;

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo

- A modelagem anterior explicita os dados diretamente no modelo, semelhante ao que é feito no `lp_solve`;
- Embora o GMPL permita isso, esta **não** é a forma ideal de usar a linguagem;

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo

- A modelagem anterior explicita os dados diretamente no modelo, semelhante ao que é feito no `lp_solve`;
- Embora o GMPL permita isso, esta **não** é a forma ideal de usar a linguagem;
- O potencial da GMPL está em permitir a definição do *modelo algébrico*, **sem os dados** de um problema específico;

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo

- A modelagem anterior explicita os dados diretamente no modelo, semelhante ao que é feito no `lp_solve`;
- Embora o GMPL permita isso, esta **não** é a forma ideal de usar a linguagem;
- O potencial da GMPL está em permitir a definição do *modelo algébrico*, **sem os dados** de um problema específico;
- Vamos então definir um modelo algébrico para o exemplo.

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo: modelo algébrico

- Ligas: $L = \{1, \ldots, n\}$;

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo: modelo algébrico

- Ligas: $L = \{1, \ldots, n\}$;
- Matérias-primas: $M = \{1, \ldots, m\}$.

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo: modelo algébrico

- Ligas: $L = \{1, \dots, n\}$;
- Matérias-primas: $M = \{1, \dots, m\}$.

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x) = \sum_{i \in L} r_i x_i \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i \in L} a_{ji} x_i \leq b_j, \ \forall j \in M \\ & x_i \geq 0, \ \forall i \in L. \end{aligned}$$

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo: modelo algébrico

```
# Conjuntos de indices
set Ligas;
set MPrimas;

# Parametros (dados de entrada)
param receita{Ligas};
param estoque{MPrimas};
param composicao{MPrimas, Ligas};

# Variaveis de decisao
var x{Ligas} >= 0;

# Funcao objetivo
maximize ReceitaTotal: sum{i in Ligas} receita[i] * x[i];

# Restricoes
estoques{j in MPrimas}:  sum{i in Ligas} composicao[j,i] * x[i] <= estoque[j];

# Resolver o problema
solve;
```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo: modelo algébrico

```
# Escrever valor otimo e solucao otima
display ReceitaTotal, x;

# Dados de uma instância do problema
data;

set Ligas := 1 2;
set MPrimas := Cobre Zinco Chumbo;

param: receita :=
1 3
2 2;

param: estoque :=
Cobre 3
Zinco  1
Chumbo 3;

param composicao : 1 2 :=
Cobre 0.5  0.3
Zinco  0.1  0.2
Chumbo  0.4  0.5;
end;
```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Seções de um arquivo GMPL

- Definição dos conjuntos de índices, usando o comando `set`:

```
set Ligas;
```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Seções de um arquivo GMPL

- Definição dos conjuntos de índices, usando o comando `set`:

```
set Ligas;
```

- Definição de parâmetros, usando o comando `param`:

```
param composicao{MPrimas, Ligas};
```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Seções de um arquivo GMPL

- Definição dos conjuntos de índices, usando o comando `set`:
  ```
  set Ligas;
  ```
- Definição de parâmetros, usando o comando `param`:
  ```
  param composicao{MPrimas, Ligas};
  ```
- Definição de variáveis, usando o comando `var`:
  ```
  var x{Ligas} >= 0;
  var y{Produtos} >= 0, integer;
  var w{Veiculos} binary;
  ```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Seções de um arquivo GMPL

- Definição dos conjuntos de índices, usando o comando `set`:

```
set Ligas;
```

- Definição de parâmetros, usando o comando `param`:

```
param composicao{MPrimas, Ligas};
```

- Definição de variáveis, usando o comando `var`:

```
var x{Ligas} >= 0;
var y{Produtos} >= 0, integer;
var w{Veiculos} binary;
```

- Definição da função objetivo, usando o comando `maximize` ou `minimize`:

```
maximize ReceitaTotal:  sum{i in Ligas} receita[i] * x[i];
```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Seções de um arquivo GMPL

- Definição de restrições, com o domínio e nome (opcional):
  ```
  estoques{j in MPrimas}:  sum{i in Ligas} composicao[j,i] *
  x[i] <= estoque[j];
  ```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Seções de um arquivo GMPL

- Definição de restrições, com o domínio e nome (opcional):
  `estoques{j in MPrimas}: sum{i in Ligas} composicao[j,i] * x[i] <= estoque[j];`
- Resolução do problema, por meio do comando `solve`;

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Seções de um arquivo GMPL

- Definição de restrições, com o domínio e nome (opcional):
  `estoques{j in MPrimas}: sum{i in Ligas} composicao[j,i] * x[i] <= estoque[j];`
- Resolução do problema, por meio do comando `solve`;
- Impressão de dados e resultados, por meio do comando `display`;
  `display ReceitaTotal, x;`
  `display {i in Tarefas, k in Estacoes: x[i,k] > 0} x[i,k];`

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Seções de um arquivo GMPL

- Definição de restrições, com o domínio e nome (opcional):
  ```
  estoques{j in MPrimas}: sum{i in Ligas} composicao[j,i] *
  x[i] <= estoque[j];
  ```
- Resolução do problema, por meio do comando `solve`;
- Impressão de dados e resultados, por meio do comando `display`;
  ```
  display ReceitaTotal, x;
  display {i in Tarefas, k in Estacoes: x[i,k] > 0} x[i,k];
  ```
- Entrada de dados da instância, por meio do comando `data`;

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Exemplo: modelo algébrico

```
# Dados de uma instância do problema
data;

set Ligas := 1 2;
set MPrimas := Cobre Zinco Chumbo;

param: receita :=
1 3
2 2;

param: estoque :=
Cobre 3
Zinco  1
Chumbo 3;

param composicao : 1 2 :=
Cobre 0.5  0.3
Zinco  0.1  0.2
Chumbo  0.4  0.5;
end;
```

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ Arquivos `.mod` e `.dat`

- O modelo em GMPL deve ser salvo no formato `.mod`;
- Podemos fazer arquivos separados para o modelo algébrico (`.mod`) e para os dados de um exemplar (instância) específico (`.dat`);
- Essa separação é importante, principalmente em projetos grandes, e permite resolver diferentes instâncias sem alterar o modelo.

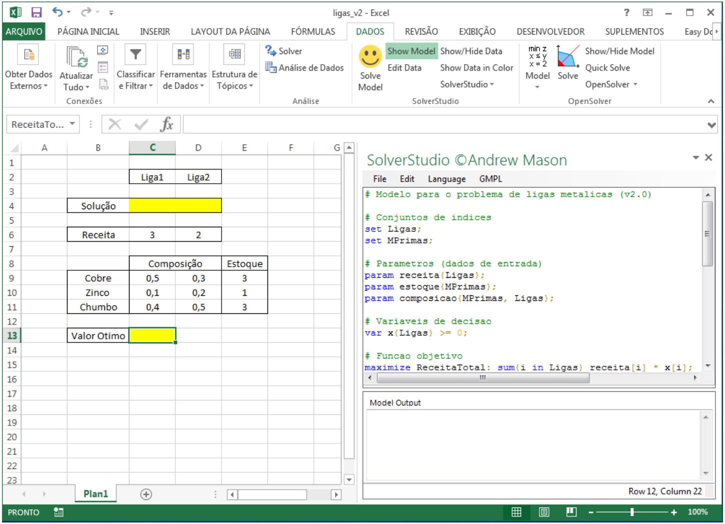
GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ `SolverStudio`

- O modelo em GMPL pode ser resolvido pelo `Gusek` ou usando qualquer outro software de otimização capaz de ler o formato GMPL ou AMPL;
- Uma alternativa interessante e que permite a integração com planilhas é o `SolverStudio`, um suplemente para o Excel disponível em: `www.solverstudio.org`;
- É uma ferramenta livre, gratuita e muito útil para o desenvolvimento de aplicações de PO integradas ao Excel;
- Permite integração com VBA para automatizar a resolução.

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ SolverStudio



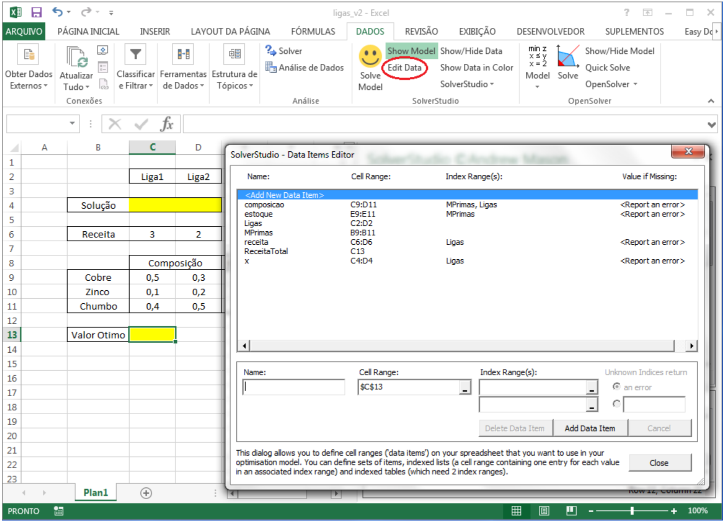
GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ `SolverStudio`

- Para ser usado no `SolverStudio`, o modelo em GMPL não deve conter a seção '`data`';
- Todos os dados devem ser inseridos na planilha e associados ao modelo por meio do botão '`Edit data`' da barra de ferramentas do `SolverStudio`;
- No formulário que se abre após clicar neste botão, devem ser definidos todos os conjuntos (*sets*) e parâmetros, bem como as variáveis e função objetivo (com o mesmo nome em que são definidos no arquivo GMPL);

GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ SolverStudio



GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

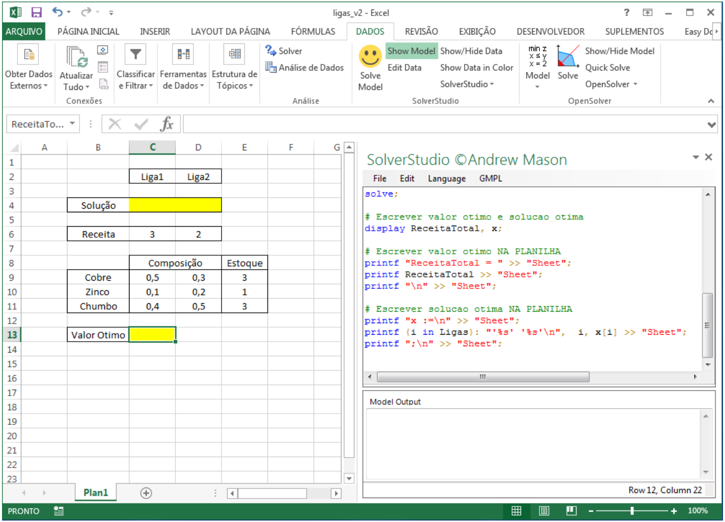
▷ SolverStudio

- Ao final do arquivo GMPL, devem ser inseridos comandos 'printf', para que a solução obtida seja escrita na planilha;
- Para o exemplo das ligas, temos:

```
# Escrever valor otimo NA PLANILHA
printf "ReceitaTotal = " >> "Sheet";
printf ReceitaTotal >> "Sheet";
printf "\n" >> "Sheet";

# Escrever solucao otima NA PLANILHA
printf "x :=\n" >> "Sheet";
printf {i in Ligas}: "'%s' '%s'\n",  i, x[i] >> "Sheet";
printf ";\n" >> "Sheet";
```

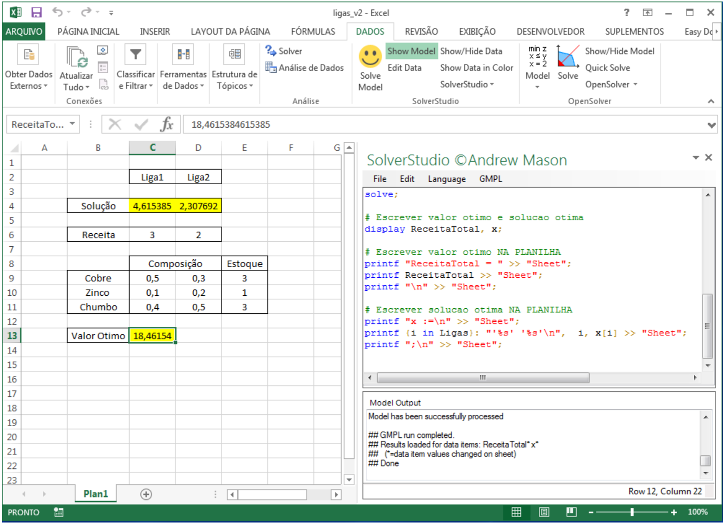
GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ SolverStudio



GNU Mathematical Programming Language (GMPL)

▷ SolverStudio



- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?