Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 1.3: Resolução gráfica em programação linear

Objetivos deste tópico

- Estudar como representar um problema de programação linear graficamente e obter sua solução ótima e valor ótimo pelo gráfico.

Programação linear

▷ Resolução gráfica

Programação linear

▷ Resolução gráfica

- Um problema de programação linear pode ser representado graficamente e resolvido por meio dessa representação;

Programação linear

▷ Resolução gráfica

- Um problema de programação linear pode ser representado graficamente e resolvido por meio dessa representação;
- Esta abordagem é possível apenas para problemas muito pequenos (até 2 variáveis);

Programação linear

▷ Resolução gráfica

- Um problema de programação linear pode ser representado graficamente e resolvido por meio dessa representação;
- Esta abordagem é possível apenas para problemas muito pequenos (até 2 variáveis);
- Mesmo assim, os *insights* proporcionados ajudam a entender melhor os conceitos fundamentais de um problema de Programação Linear e a interpretar as respostas dos *softwares*.

Resolução gráfica

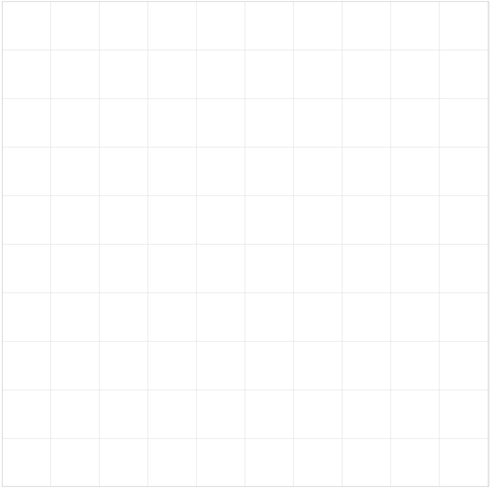
▷ Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

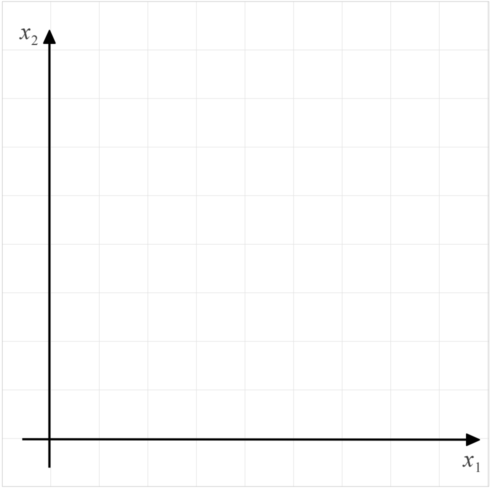
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

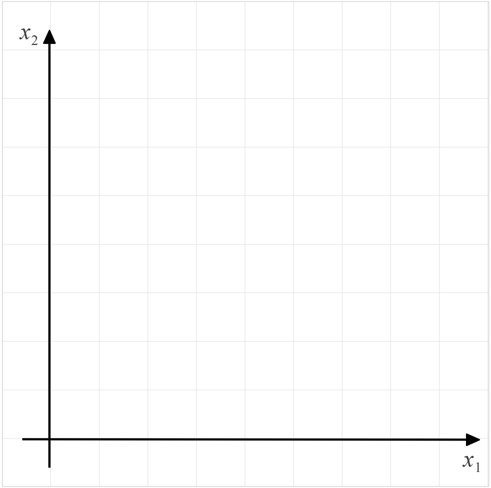
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

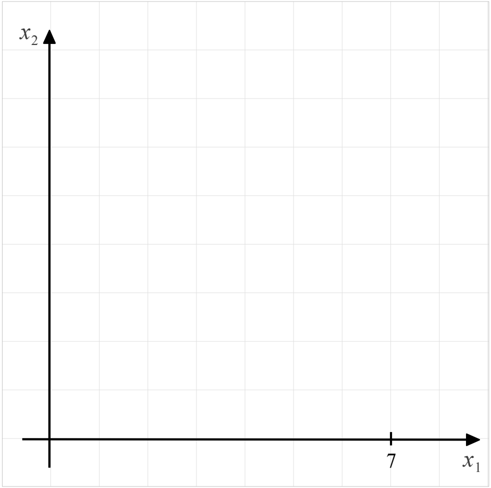
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

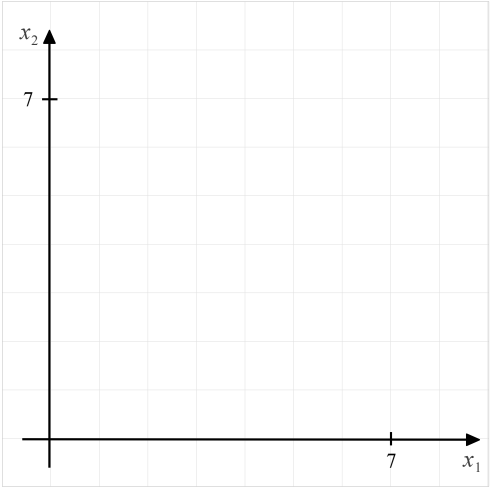
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

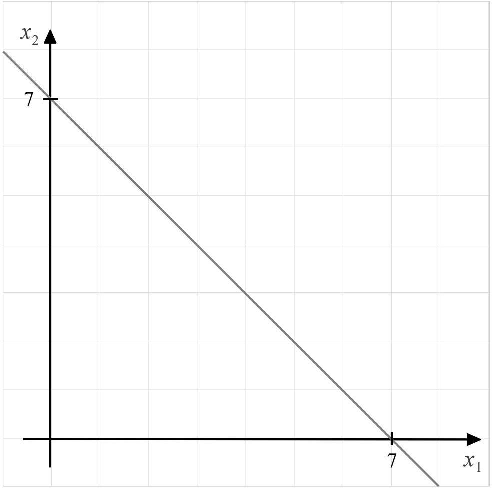
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

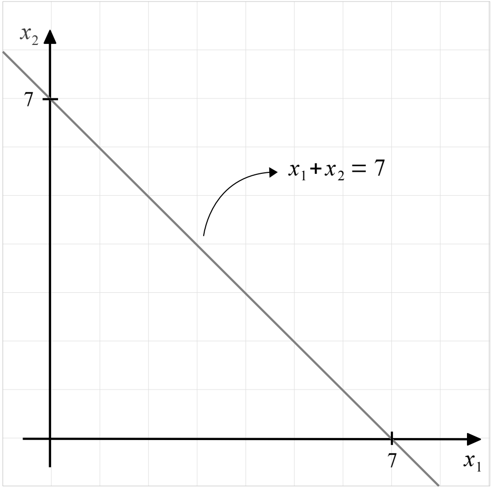
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

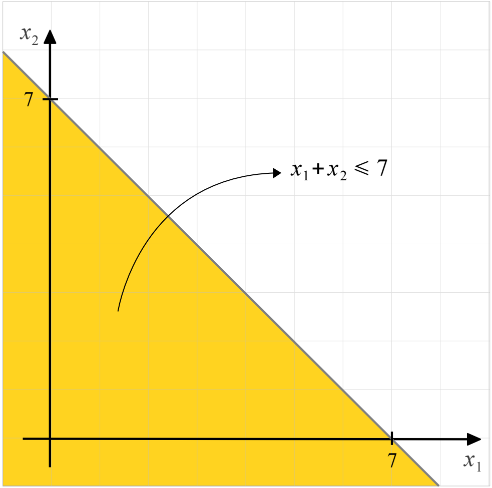
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

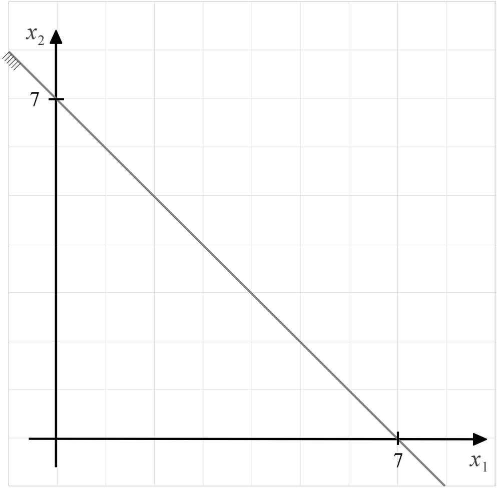
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

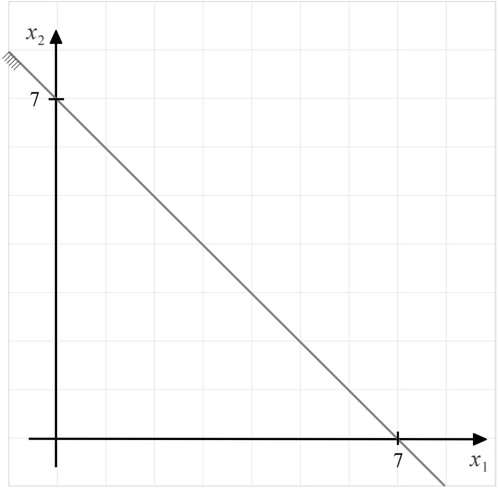
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

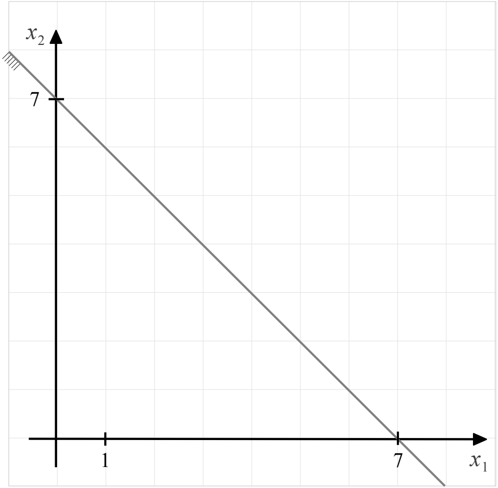
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

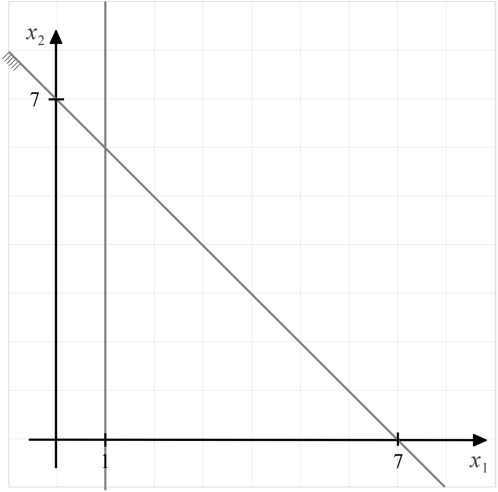
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

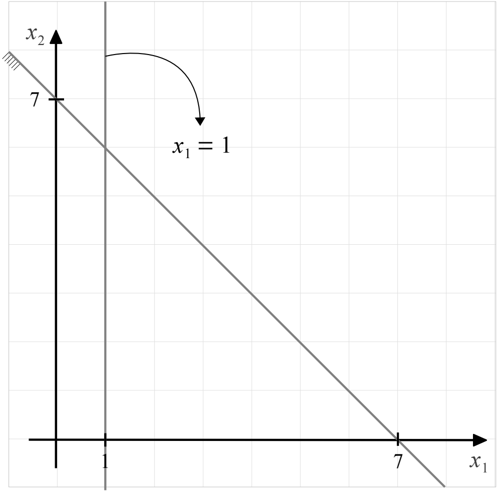
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

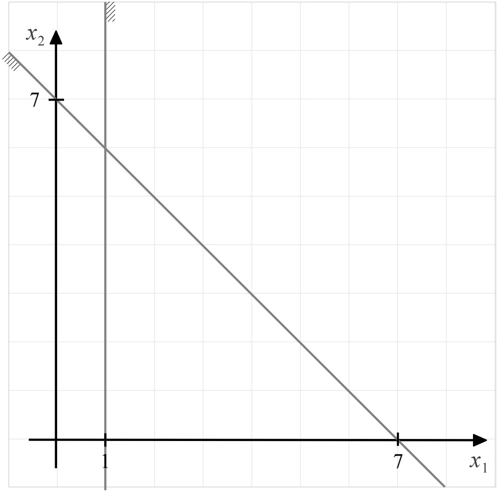
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

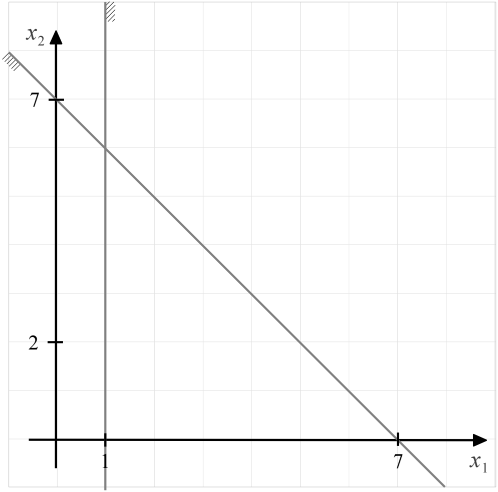
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

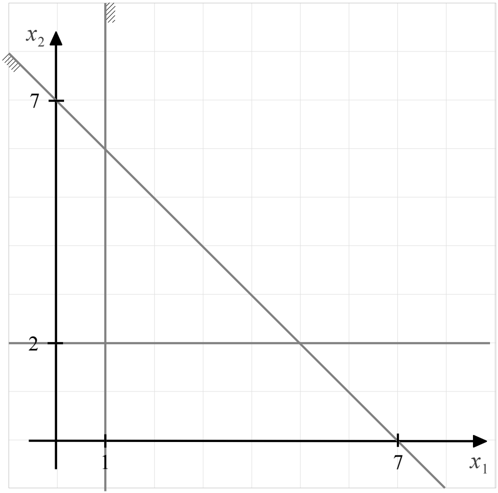
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

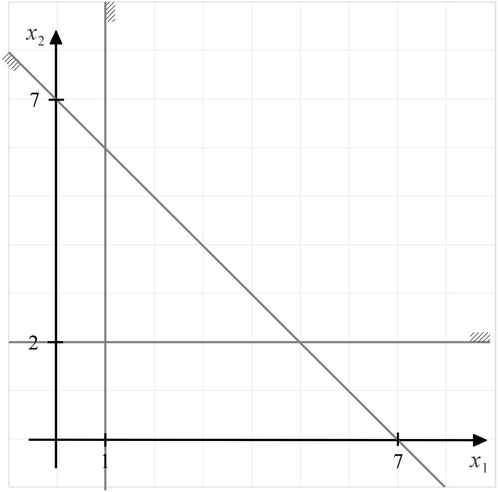
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

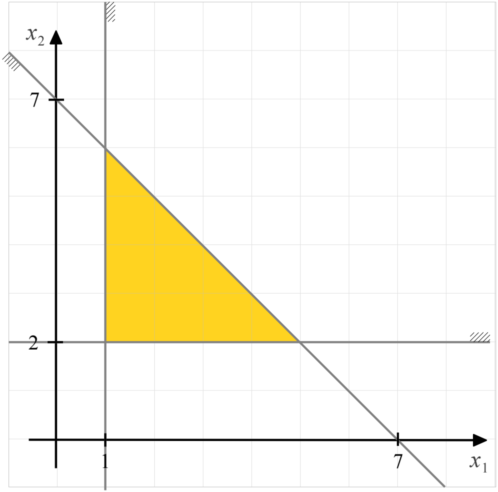
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

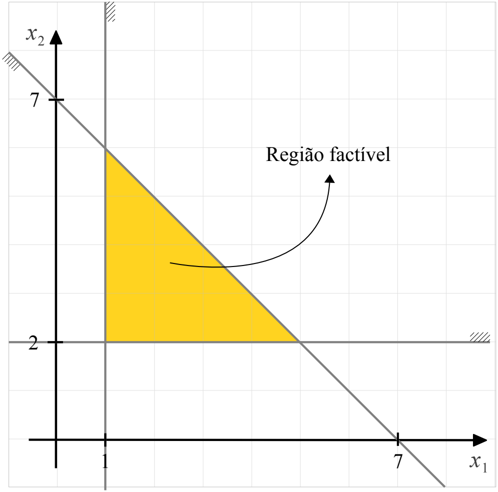
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

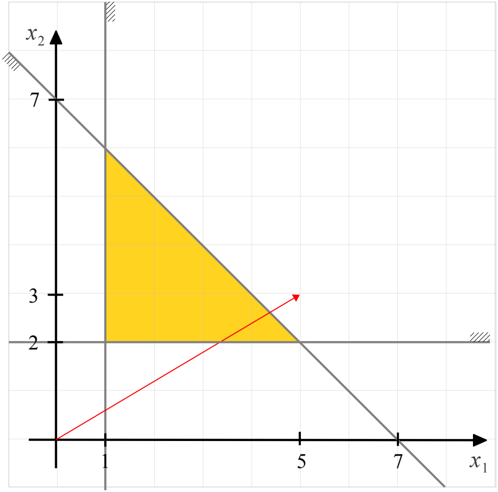
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

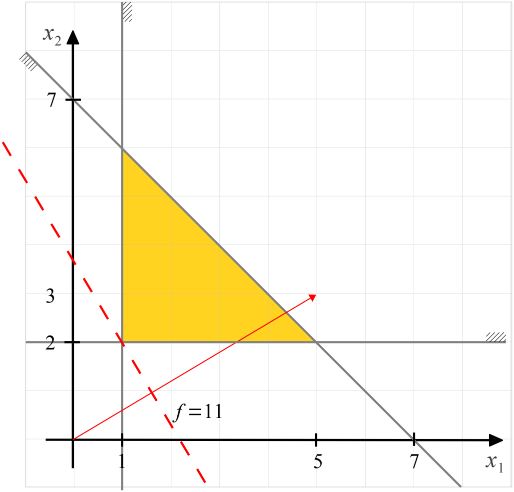
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

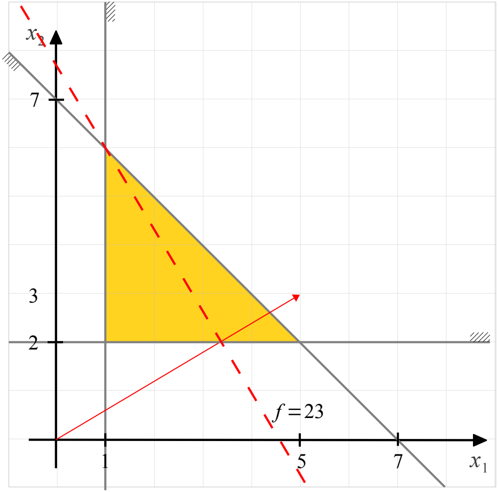
$$\begin{array}{rl} \text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

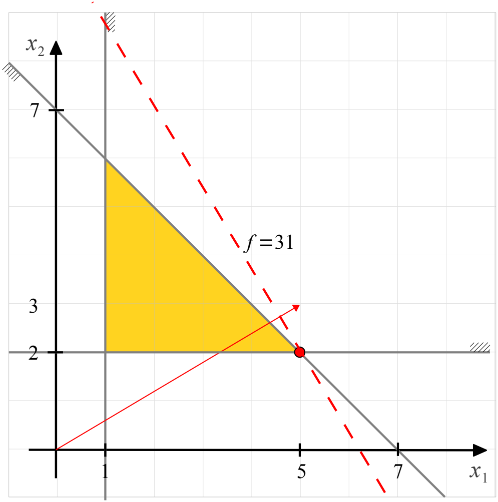
$$
\begin{aligned}
\textcolor{red}{\max} \quad & \textcolor{red}{5x_1 + 3x_2} \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

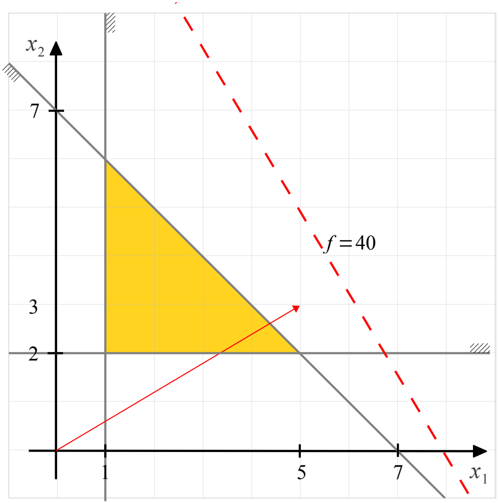
$$\begin{array}{rl} \text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

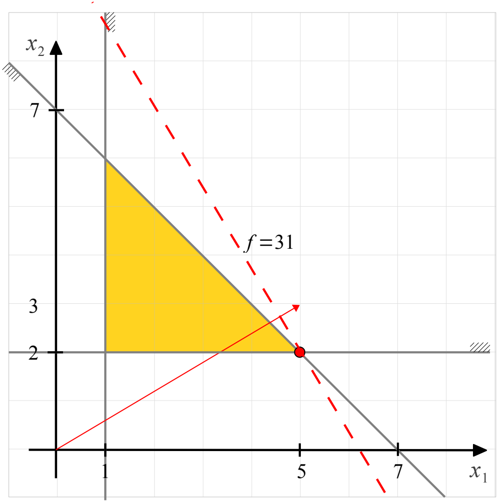
$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

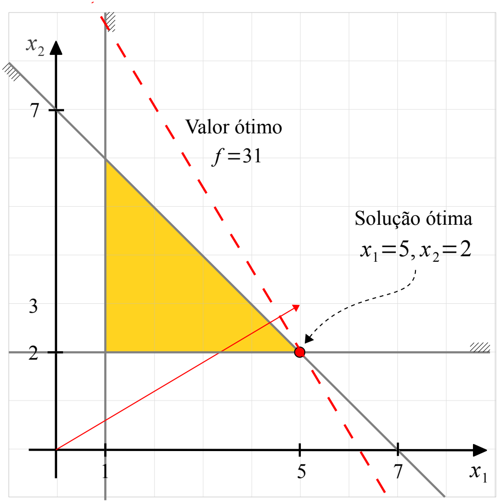
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 1

- Portanto, pelo método gráfico, obtemos a solução ótima $x_1 = 5, x_2 = 2$, com valor ótimo 31.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- Para cada restrição do problema:

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- Para cada restrição do problema:
  - Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- Para cada restrição do problema:
  - Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
  - Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- Para cada restrição do problema:
  - Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
  - Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.
- A região factível é dada pela intersecção dos lados factíveis.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- Para cada restrição do problema:
  - Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
  - Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.
- A região factível é dada pela intersecção dos lados factíveis.
- Desenhar o gradiente da função objetivo e as curvas de nível (perpendiculares).

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de maximização)

- Para cada restrição do problema:
  - Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
  - Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.
- A região factível é dada pela intersecção dos lados factíveis.
- Desenhar o gradiente da função objetivo e as curvas de nível (perpendiculares).
- Obter o ponto em que a curva de nível corresponde ao maior valor dentro da região factível.

Programação linear

▷ Método gráfico (problemas de minimização)

- Para cada restrição do problema:
  - Traçar as retas das equações correspondentes a cada restrição.
  - Se for uma desigualdade, determine o lado factível usando algum ponto que satisfaça a restrição.
- A região factível é dada pela intersecção dos lados factíveis.
- Desenhar o gradiente da função objetivo e as curvas de nível (perpendiculares).
- Obter o ponto em que a curva de nível corresponde ao menor valor dentro da região factível.

Resolução gráfica

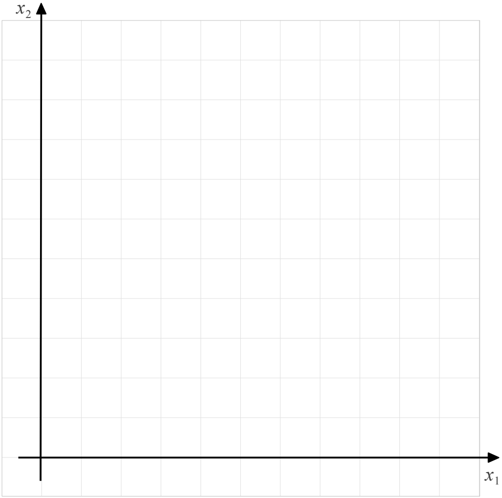
▷ Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

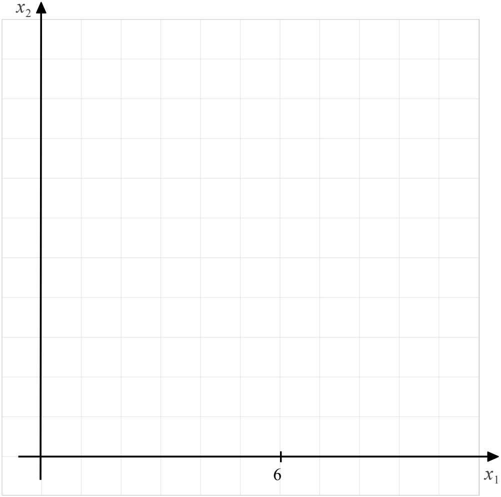
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

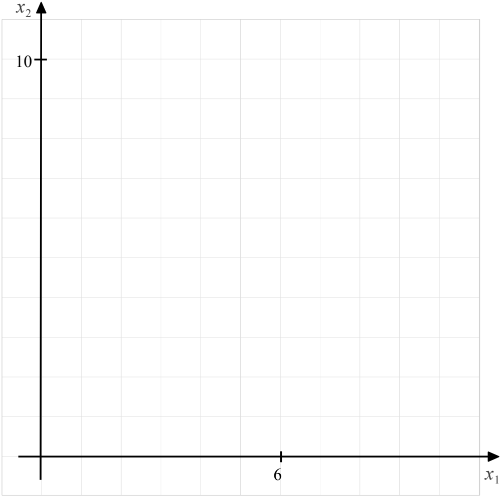
$$
\begin{array}{lr}
\text{max} & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
 & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

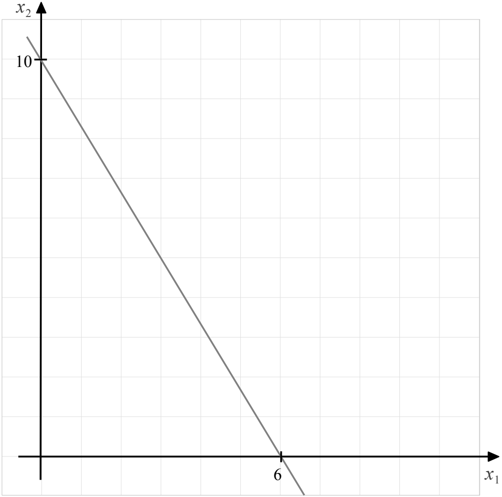
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

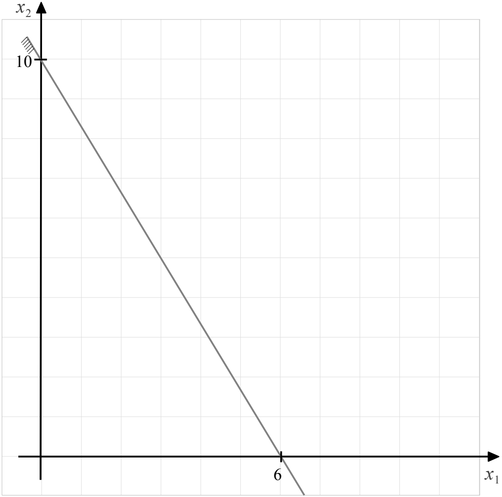
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 3 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

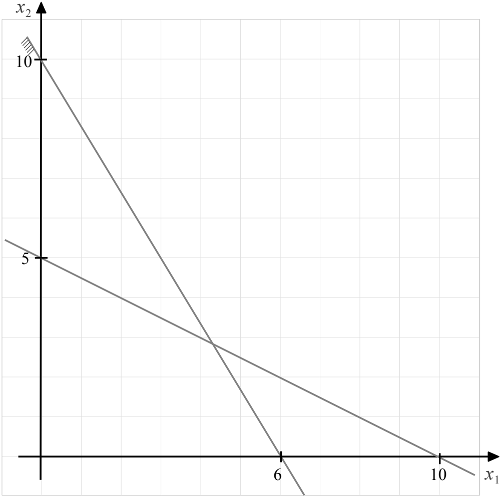
$$
\begin{array}{rr}
\text{max} & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
 & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

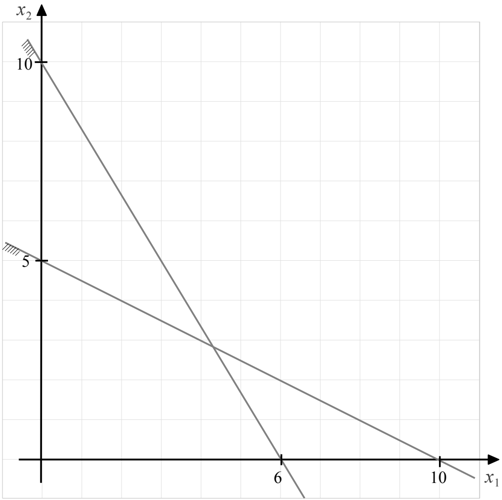
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 3 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

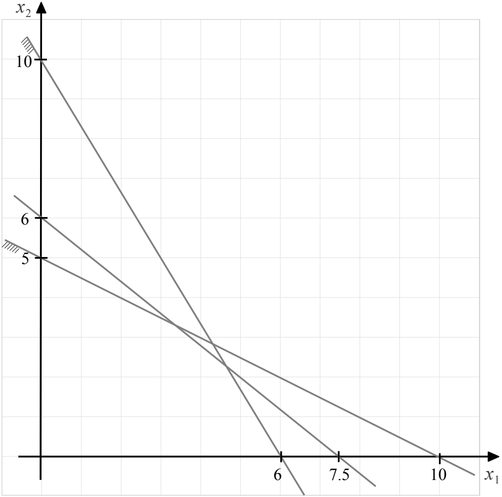
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 3 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

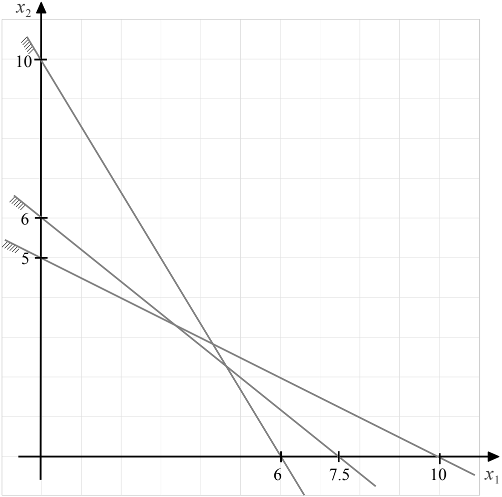
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

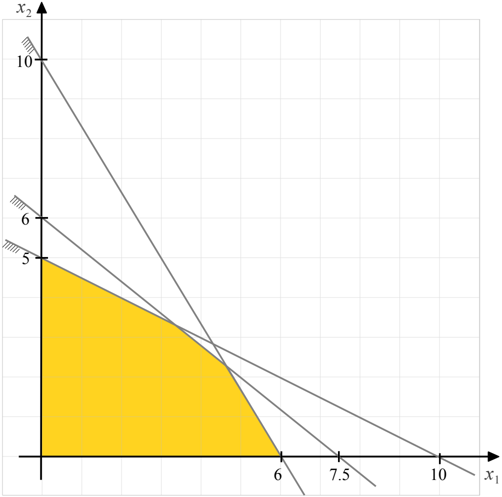
$$\begin{array}{rl} \text{max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

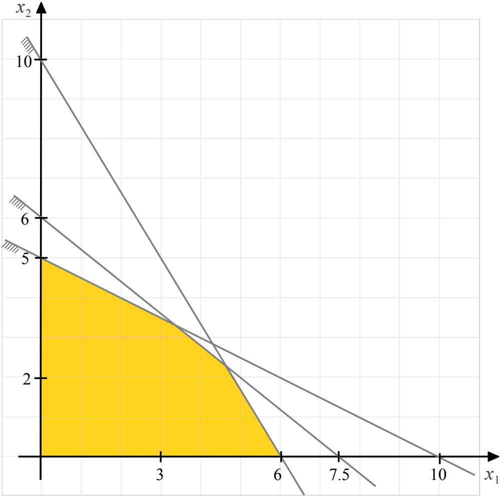
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

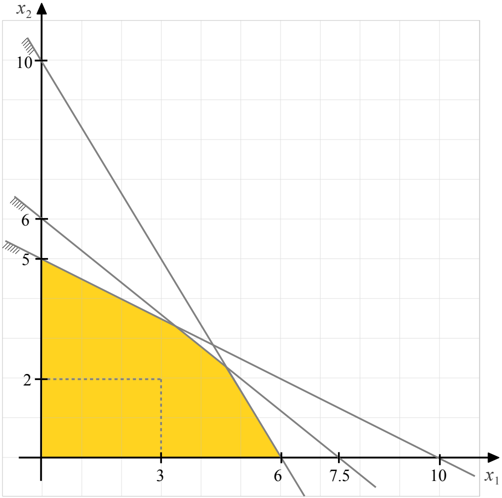
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

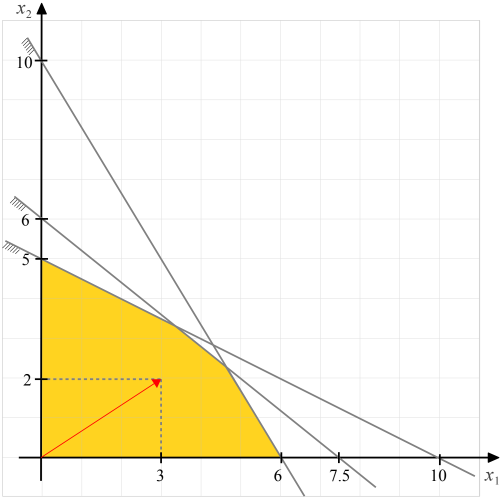
$$\begin{array}{rl} \text{max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

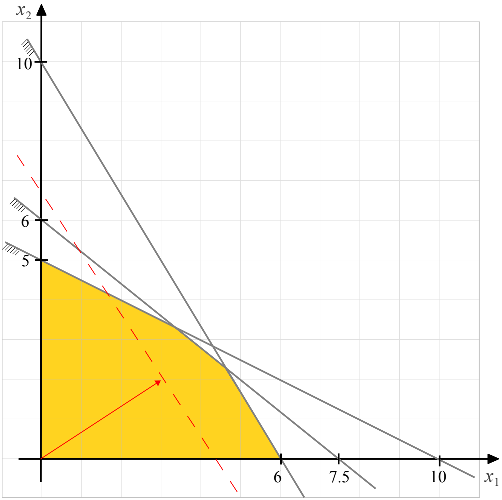
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

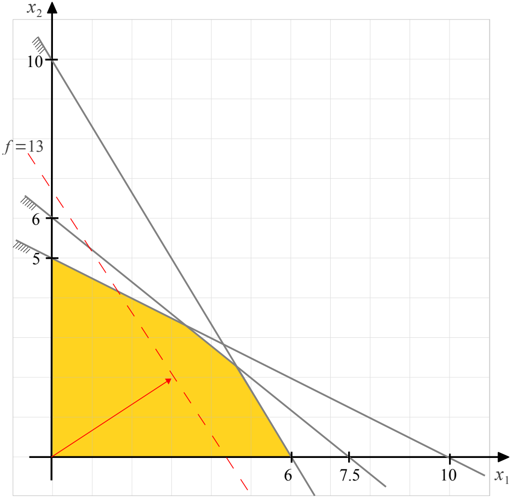
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

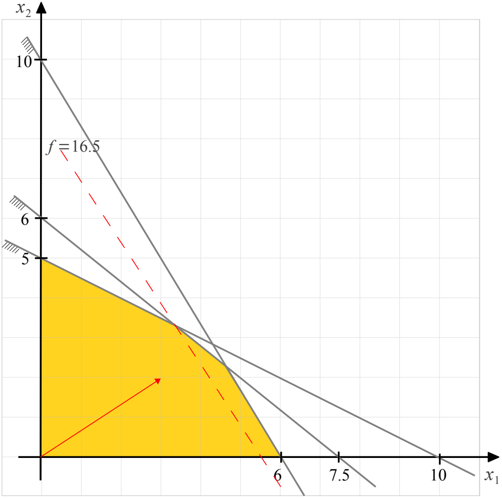
$$\begin{array}{rl} \text{max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 3 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

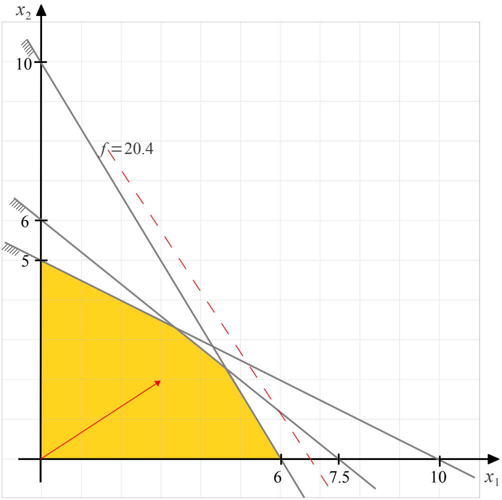
$$\begin{array}{rl} \text{max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

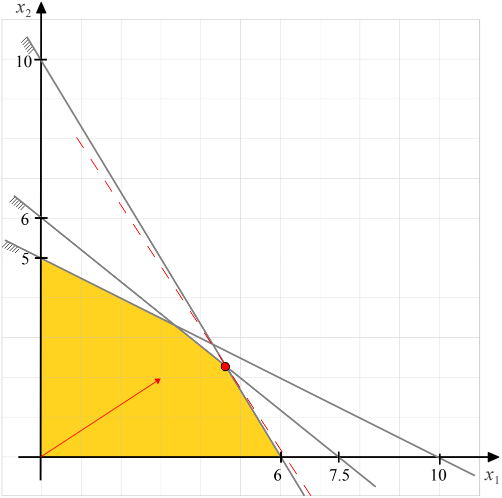
$$\begin{array}{ll} \text{max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

$$\begin{array}{ll} \text{max} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

- A solução ótima é dada pelo ponto de intersecção das retas de suporte das restrições 1 e 3.

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

- A solução ótima é dada pelo ponto de intersecção das retas de suporte das restrições 1 e 3.
- Assim, deve satisfazer o sistema

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 & = & 3 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & = & 3 \end{cases}$$

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2

- A solução ótima é dada pelo ponto de intersecção das retas de suporte das restrições 1 e 3.
- Assim, deve satisfazer o sistema

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 & = & 3 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & = & 3 \end{cases}$$

- Portanto, a solução ótima é $x_1 \approx 4{,}62, x_2 \approx 2{,}3$, com valor ótimo $18{,}46$.

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

- A maior receita bruta possível é obtida fabricando-se 4,62 ton da liga 1 e 2,31 toneladas da liga 2.

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

- A maior receita bruta possível é obtida fabricando-se 4,62 ton da liga 1 e 2,31 toneladas da liga 2.

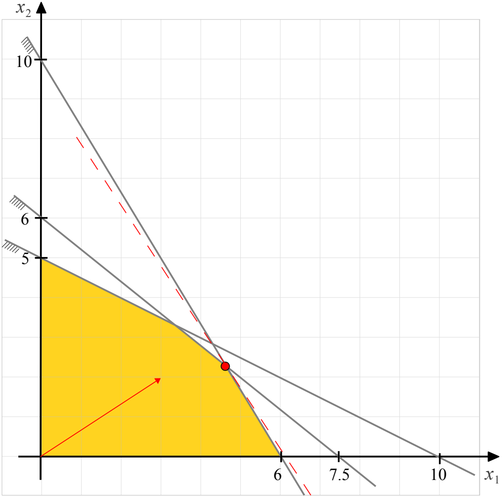
Perguntas:

- Quanto foi usado de cobre, zinco e chumbo?

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

- A maior receita bruta possível é obtida fabricando-se 4,62 ton da liga 1 e 2,31 toneladas da liga 2.

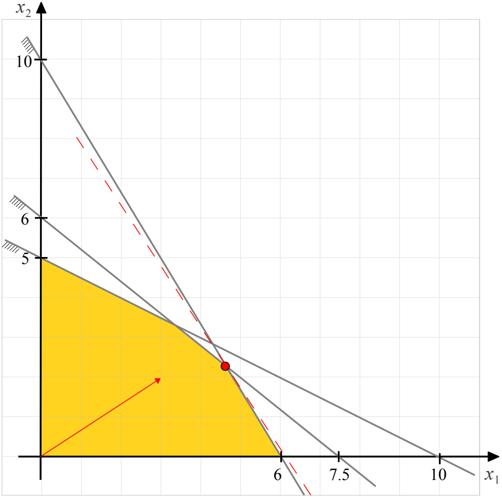
Perguntas:

- Quanto foi usado de cobre, zinco e chumbo?
- Se a empresa pudesse comprar 2 ton adicionais de apenas um deles, qual seria a melhor escolha?

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

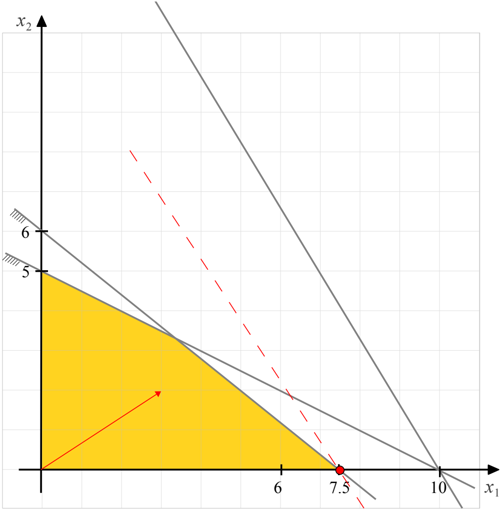
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

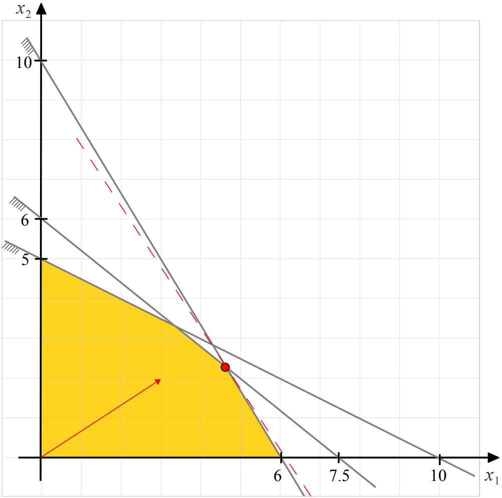
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 5 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
 & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

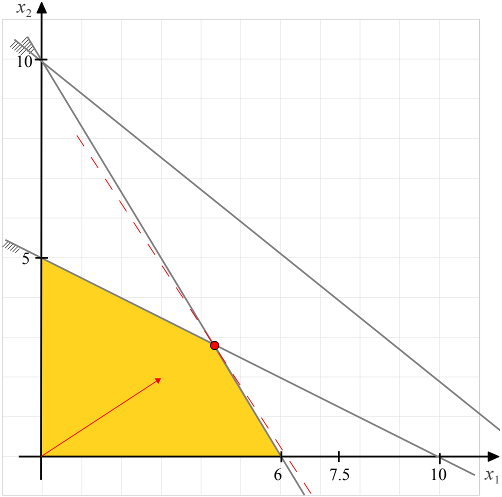
$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

- A maior receita bruta possível é obtida fabricando-se 4,62 ton da liga 1 e 2,31 toneladas da liga 2.

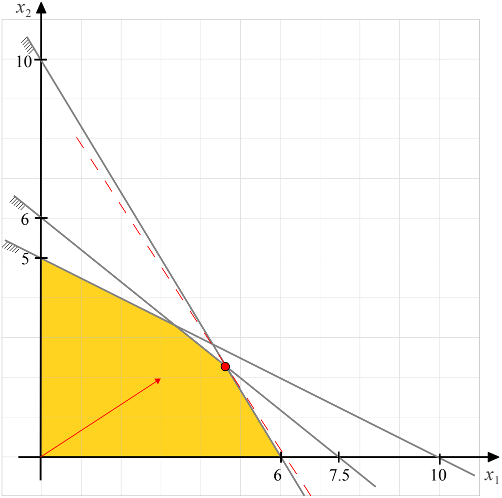
Perguntas:

- Quanto foi usado de cobre, zinco e chumbo?
- Se a empresa pudesse comprar 2 ton adicionais de apenas um deles, qual seria a melhor escolha?
- Qual seria a solução ótima do problema, se os preços das ligas 1 e 2 fossem R$ 2 mil e R$ 3 mil, respec.?

Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

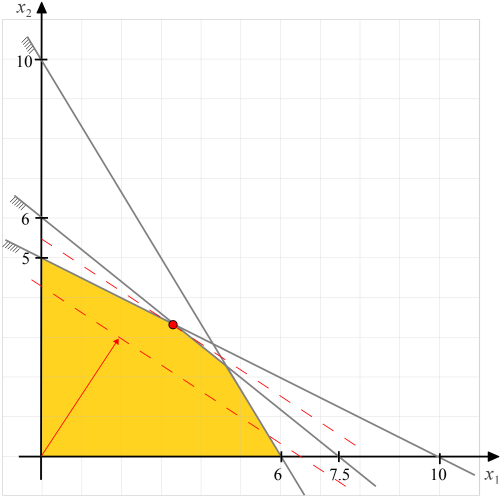
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Resolução gráfica

▷ Exemplo 2: Algumas análises

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

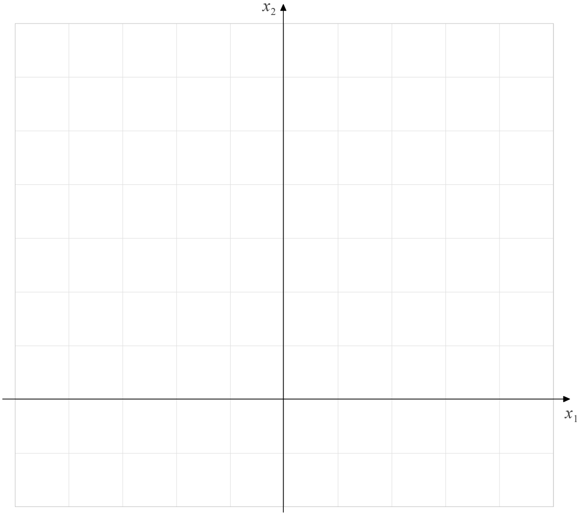
Determine uma solução ótima usando o método gráfico.

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Resolução gráfica

▷ Exercício

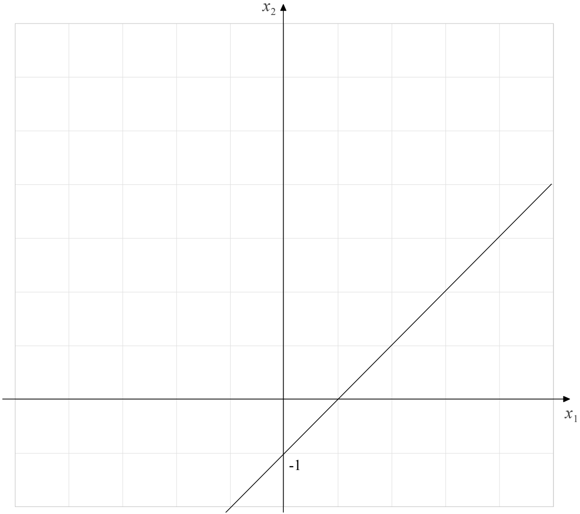
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \le 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \ge 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \le 9 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

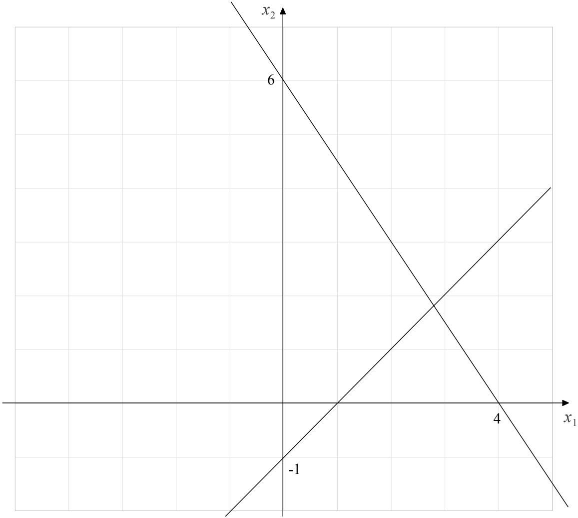
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

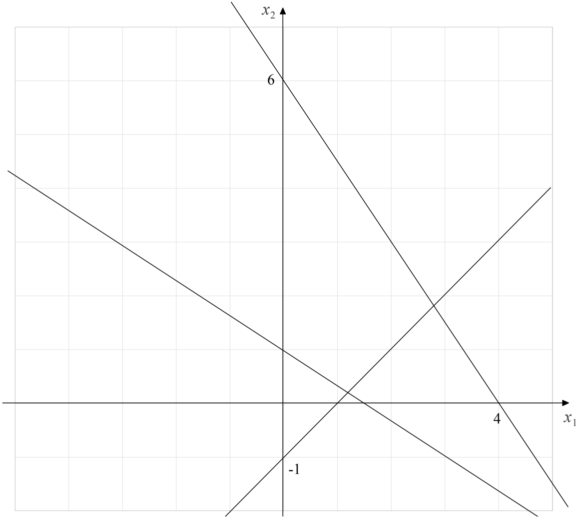
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

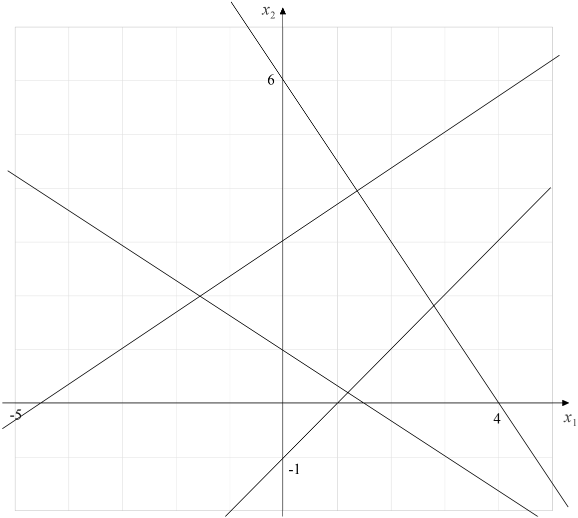
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

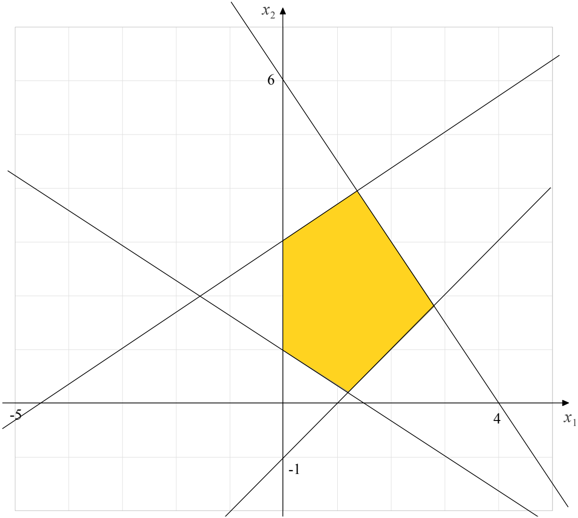
$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

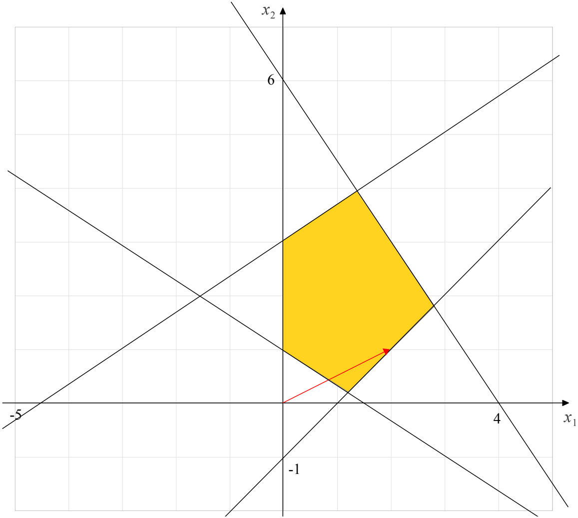
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \le 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \ge 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \le 9 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

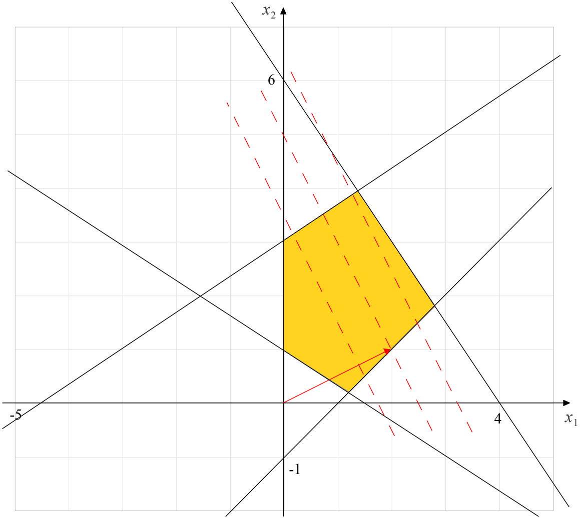
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

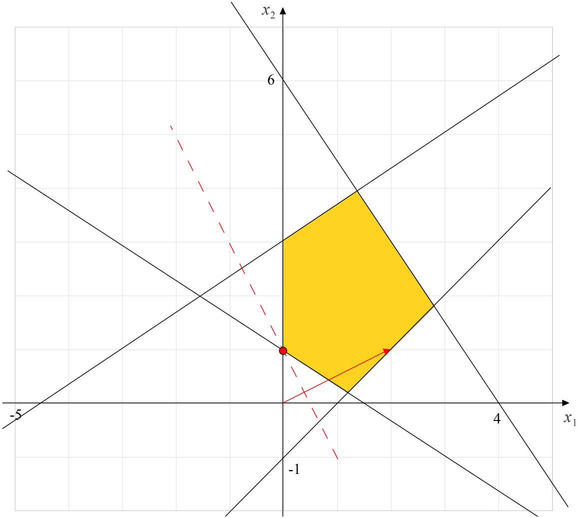
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$



Resolução gráfica

▷ Exercício

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, temos a solução ótima $x^* = (0, 1)$ com valor ótimo $f(x^*) = 1$.

Programação linear

▷ Casos particulares

Programação linear

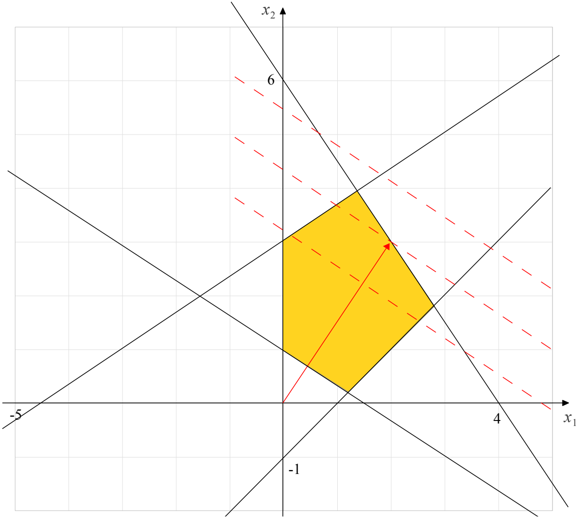
▷ Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Programação linear

▷ Casos particulares

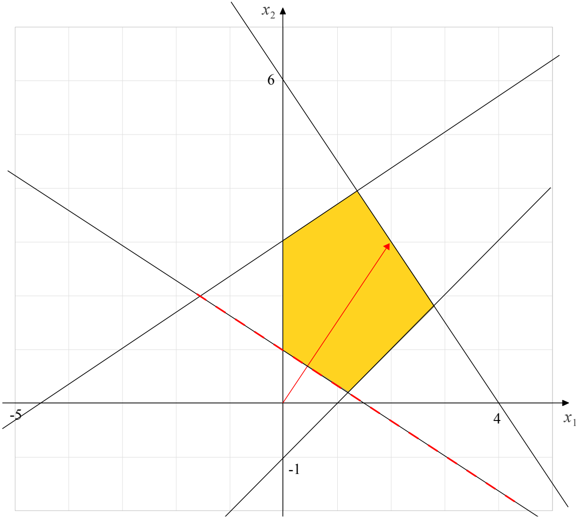
$$\begin{array}{rc} \text{min} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$



Programação linear

▷ Casos particulares

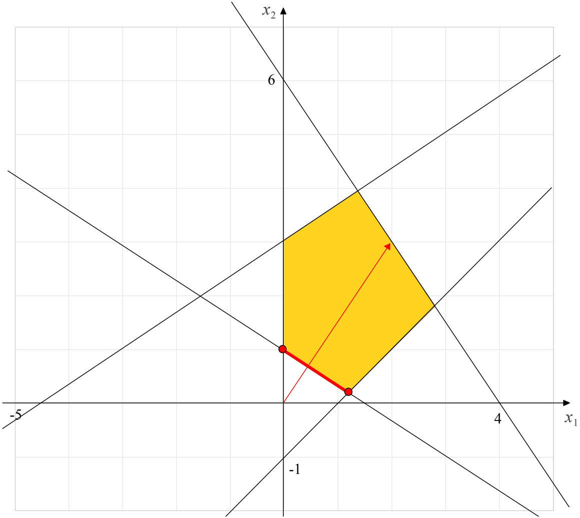
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Programação linear

▷ Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \color{red}{f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2} \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

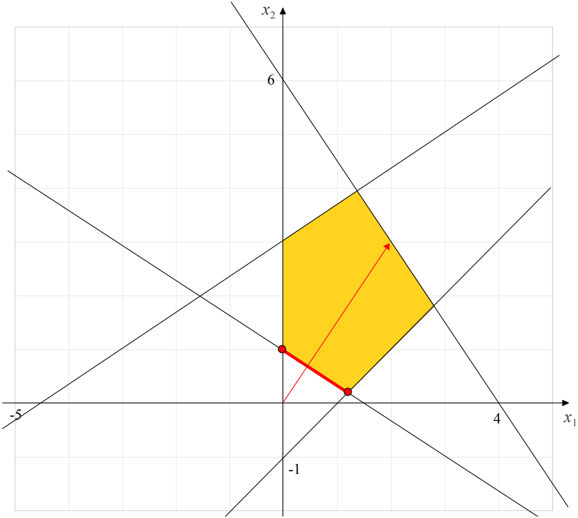


Programação linear

▷ Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

▷ Múltiplas soluções ótimas



Programação linear

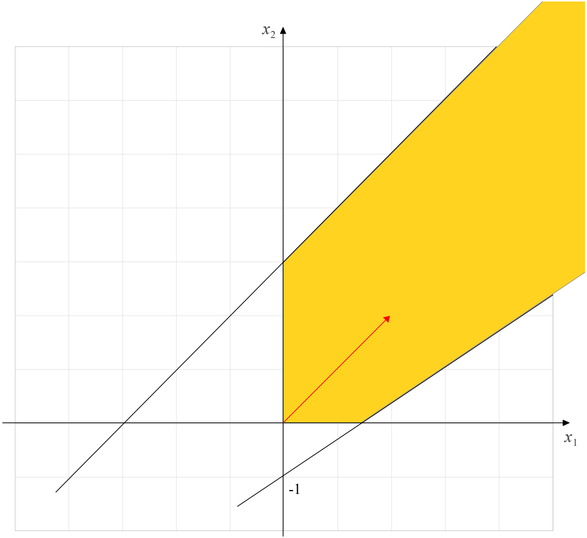
▷ Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Programação linear

▷ Casos particulares

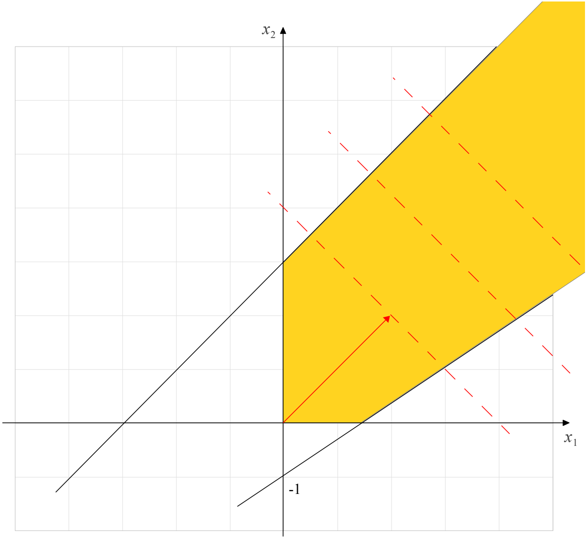
$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$



Programação linear

▷ Casos particulares

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

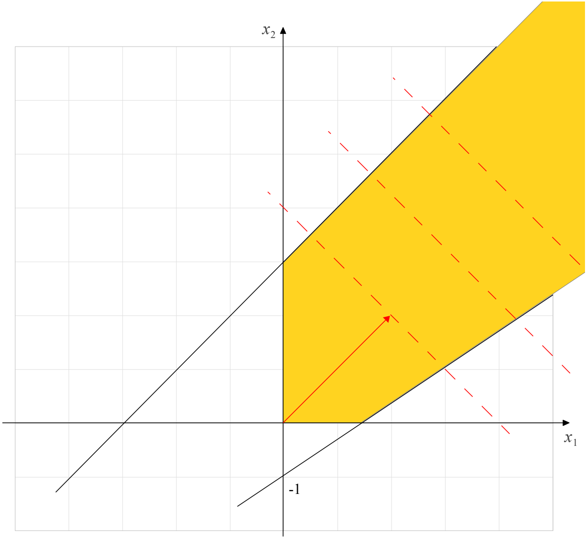


Programação linear

▷ Casos particulares

$$\begin{array}{ll} \color{red}{\text{max}} & \color{red}{f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2} \\ \text{s.a} & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

▷ Problema ilimitado



Programação linear

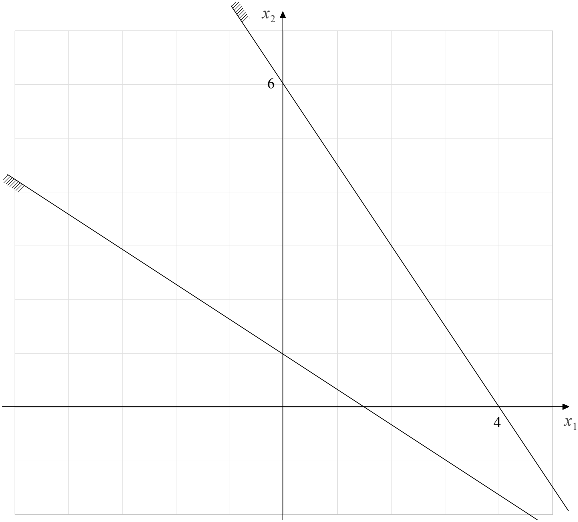
▷ Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Programação linear

▷ Casos particulares

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

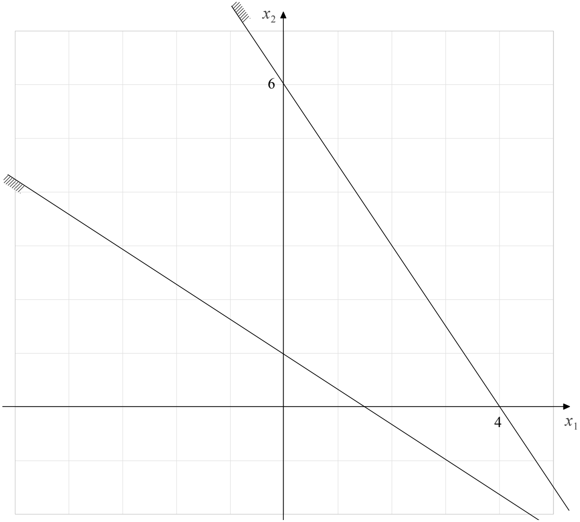


Programação linear

▷ Casos particulares

$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

▷ Problema infactível



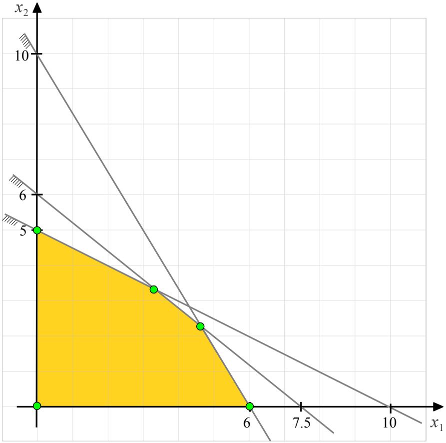
Programação linear

▷ Pontos extremos

Programação linear

▷ Pontos extremos

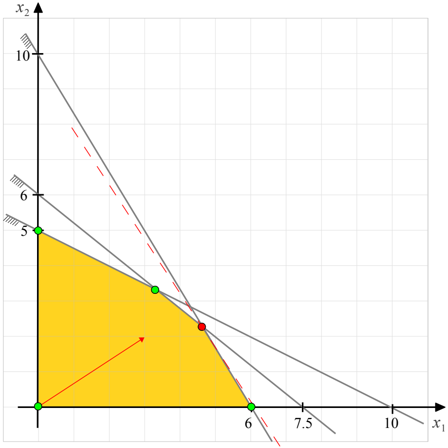
- Nos gráficos vistos, um ponto extremo é todo ponto na fronteira da região factível que é determinado pelo cruzamento de pelo menos duas retas.



Programação linear

▷ Pontos extremos

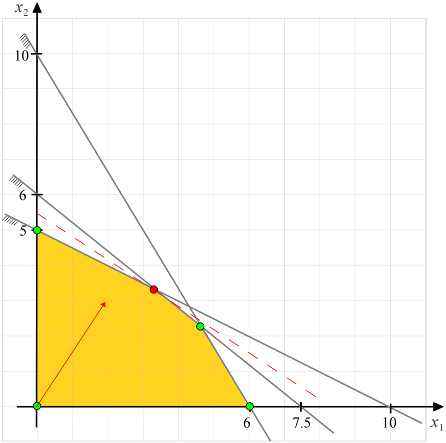
- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.



Programação linear

▷ Pontos extremos

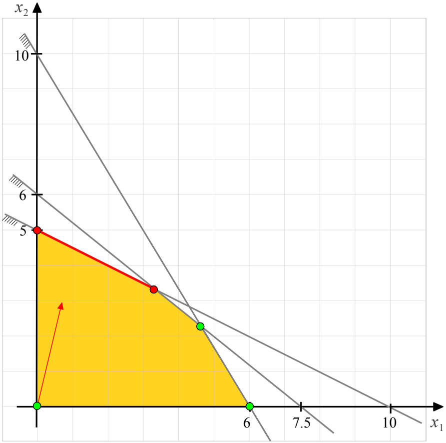
- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.



Programação linear

▷ Pontos extremos

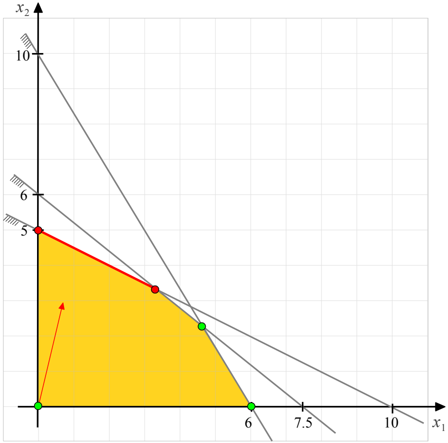
- A toda solução ótima está associado um ponto extremo;



Programação linear

▷ Pontos extremos

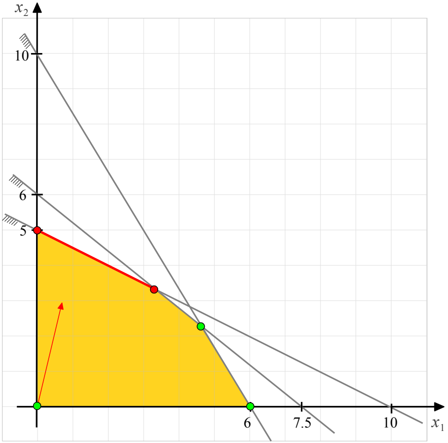
- A toda solução ótima está associado um ponto extremo;
- *Se existe solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo;*



Programação linear

▷ Pontos extremos

- A toda solução ótima está associado um ponto extremo;
- *Se existe solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo;*
- Essa é uma observação fundamental em Programação Linear.



- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?