



Universidade Federal de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Produção



# Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022  
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 1.4: Forma padrão em programação linear

# Objetivos deste tópico

- ▶ Estudar o que é um problema de programação linear na forma padrão;
- ▶ Conhecer as formas de converter um problema qualquer para a forma padrão.

# Forma padrão

## ▷ Modelo

# Forma padrão

## ▷ Modelo

$$\text{minimizar} \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

# Forma padrão

## ▷ Modelo

$$\text{minimizar } f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

## ▶ Minimização

# Forma padrão

## ▷ Modelo

$$\text{minimizar} \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

- ▶ Minimização
- ▶ Todas as restrições são equações

# Forma padrão

## ▷ Modelo

$$\text{minimizar} \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

- ▶ Minimização
- ▶ Todas as restrições são equações
- ▶ Todas as variáveis são não-negativas

# Forma padrão

## ▷ Modelo

$$\text{minimizar} \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

- ▶ Minimização
- ▶ Todas as restrições são equações
- ▶ Todas as variáveis são não-negativas
- ▶ Em alguns livros:  $b_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ .



# Forma padrão

▷ Transformando para a forma padrão

- ▶ Podemos transformar qualquer problema para a forma padrão.

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

- ▶ Podemos transformar qualquer problema para a forma padrão.
- ▶ Considere um problema geral, como o seguinte:

## Forma padrão

### ▷ Transformando para a forma padrão

- ▶ Podemos transformar qualquer problema para a forma padrão.
- ▶ Considere um problema geral, como o seguinte:

$$\max \quad f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{s.a} \quad a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \text{ livre}, \dots, x_n \leq C$$

# Forma padrão

▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

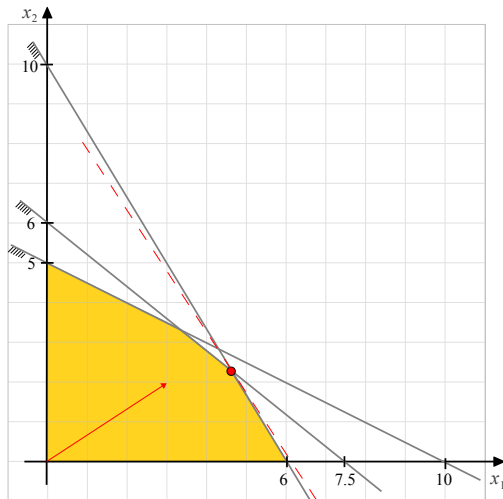
Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$

# Forma padrão

▷ Transformando para a forma padrão: ilustração

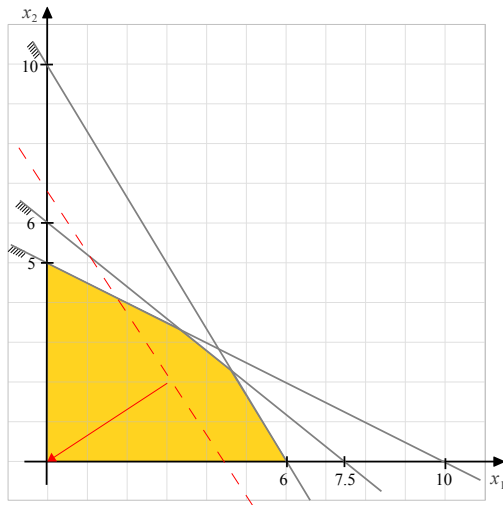
$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



# Forma padrão

▷ Transformando para a forma padrão: ilustração

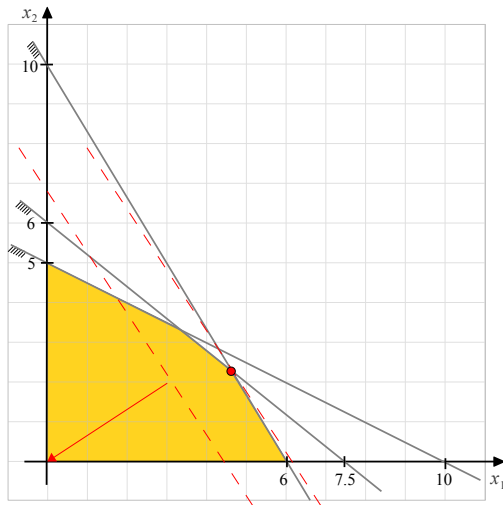
$$\begin{aligned}
 &(-1) \times \min \quad -f(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 \\
 &\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 &\quad \quad 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 &\quad \quad 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 &\quad \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



# Forma padrão

▷ Transformando para a forma padrão: ilustração

$$\begin{aligned}
 &(-1) \times \min \quad -f(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 \\
 &\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 &\quad \quad 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 &\quad \quad 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 &\quad \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$





# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).

2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).

2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).

2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);

Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ ,  $x_3 \geq 0$ .

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ ,  $x_3 \geq 0$ .
3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$



# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ ,  $x_3 \geq 0$ .
3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ ,  $x_3 \geq 0$ .
3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,  
sendo  $x_2^a \geq 0$  uma variável de excesso (*surplus*);

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ ,  $x_3 \geq 0$ .
3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,  
sendo  $x_2^a \geq 0$  uma variável de excesso (*surplus*);  
Por exemplo,  $1x_1 + 4x_2 \geq 9$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).

2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);

Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, x_3 \geq 0$ .

3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,  
sendo  $x_2^a \geq 0$  uma variável de excesso (*surplus*);

Por exemplo,  $1x_1 + 4x_2 \geq 9 \Rightarrow 1x_1 + 4x_2 - x_3 = 9, x_3 \geq 0$ .

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ ,  $x_3 \geq 0$ .
3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,  
sendo  $x_2^a \geq 0$  uma variável de excesso (*surplus*);  
Por exemplo,  $1x_1 + 4x_2 \geq 9 \Rightarrow 1x_1 + 4x_2 - x_3 = 9$ ,  $x_3 \geq 0$ .
4. Se algum  $b_i < 0$ , multiplicamos a restrição por  $-1$ :

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, x_3 \geq 0$ .
3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,  
sendo  $x_2^a \geq 0$  uma variável de excesso (*surplus*);  
Por exemplo,  $1x_1 + 4x_2 \geq 9 \Rightarrow 1x_1 + 4x_2 - x_3 = 9, x_3 \geq 0$ .
4. Se algum  $b_i < 0$ , multiplicamos a restrição por  $-1$ :  
 $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, x_3 \geq 0$ .
3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,  
sendo  $x_2^a \geq 0$  uma variável de excesso (*surplus*);  
Por exemplo,  $1x_1 + 4x_2 \geq 9 \Rightarrow 1x_1 + 4x_2 - x_3 = 9, x_3 \geq 0$ .
4. Se algum  $b_i < 0$ , multiplicamos a restrição por  $-1$ :  
 $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \Rightarrow -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i$ ;

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).

2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);

Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, x_3 \geq 0$ .

3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,  
sendo  $x_2^a \geq 0$  uma variável de excesso (*surplus*);

Por exemplo,  $1x_1 + 4x_2 \geq 9 \Rightarrow 1x_1 + 4x_2 - x_3 = 9, x_3 \geq 0$ .

4. Se algum  $b_i < 0$ , multiplicamos a restrição por  $-1$ :

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \Rightarrow -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i;$$

Por exemplo,  $x_1 - 5x_2 = -3$



# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Usamos as seguintes equivalências:

1.  $\max f(x) = (-1) \times \min -f(x)$  (ou  $-\min -f(x)$ ).
2.  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$ ,  
sendo  $x_1^a \geq 0$  uma variável de folga (*slack*);  
Por exemplo,  $5x_1 + 3x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ ,  $x_3 \geq 0$ .
3.  $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$ ,  
sendo  $x_2^a \geq 0$  uma variável de excesso (*surplus*);  
Por exemplo,  $1x_1 + 4x_2 \geq 9 \Rightarrow 1x_1 + 4x_2 - x_3 = 9$ ,  $x_3 \geq 0$ .
4. Se algum  $b_i < 0$ , multiplicamos a restrição por  $-1$ :  
 $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \Rightarrow -a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n \geq -b_i$ ;  
Por exemplo,  $x_1 - 5x_2 = -3 \Rightarrow -x_1 + 5x_2 = 3$ .

# Forma padrão

▷ Transformando para a forma padrão: ilustração

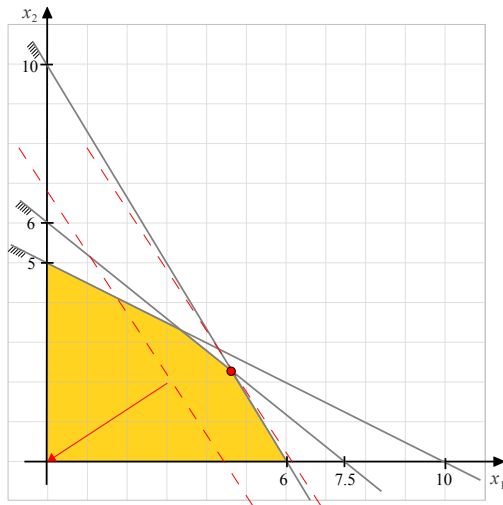
$$-\min \quad -f(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

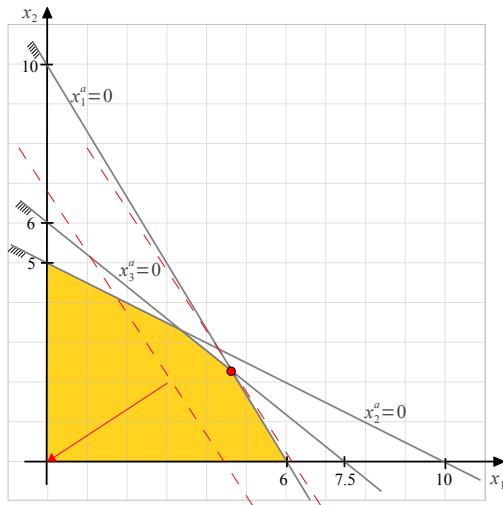
$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Forma padrão

▷ Transformando para a forma padrão: ilustração

$$\begin{aligned}
 &-\min && -f(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 \\
 &\text{s.a} && 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_1^a = 3 \\
 &&& 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_2^a = 1 \\
 &&& 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_3^a = 3 \\
 &&& x_1, x_2, x_1^a, x_2^a, x_3^a \geq 0
 \end{aligned}$$



# Forma padrão

▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

▶  $x_j \leq 0$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5$ ,  $x_1 \leq 0$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5$ ,  $x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5$ ,  $x'_1 \geq 0$ ;



# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0$$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5$ ,  $x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5$ ,  $x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ ,  $x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ ,  $x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

## Forma padrão

### ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1$

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .



## Forma padrão

### ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \leq u_j$ :

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \leq u_j$ : Tratar como nova restrição do problema (em vez de limitante).

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \leq u_j$ : Tratar como nova restrição do problema (em vez de limitante).
- ▶  $x_j$  livre

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \leq u_j$ : Tratar como nova restrição do problema (em vez de limitante).

- ▶  $x_j$  livre  $\Rightarrow$  Substituímos por  $x_j = x_j^+ - x_j^-$ , sendo  $x_j^+, x_j^- \geq 0$ :

# Forma padrão

## ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \leq u_j$ : Tratar como nova restrição do problema (em vez de limitante).

- ▶  $x_j$  livre  $\Rightarrow$  Substituímos por  $x_j = x_j^+ - x_j^-$ , sendo  $x_j^+, x_j^- \geq 0$ :

Por ex.:  $2x_1 + 3x_2 \leq 5, x_1$  livre

## Forma padrão

### ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \leq u_j$ : Tratar como nova restrição do problema (em vez de limitante).

- ▶  $x_j$  livre  $\Rightarrow$  Substituímos por  $x_j = x_j^+ - x_j^-$ , sendo  $x_j^+, x_j^- \geq 0$ :

Por ex.:  $2x_1 + 3x_2 \leq 5, x_1$  livre  $\Rightarrow 2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 \leq 5, x_1^+, x_1^- \geq 0$ ;

## Forma padrão

### ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \leq u_j$ : Tratar como nova restrição do problema (em vez de limitante).

- ▶  $x_j$  livre  $\Rightarrow$  Substituímos por  $x_j = x_j^+ - x_j^-$ , sendo  $x_j^+, x_j^- \geq 0$ :

Por ex.:  $2x_1 + 3x_2 \leq 5, x_1$  livre  $\Rightarrow 2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 \leq 5, x_1^+, x_1^- \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1$  livre

## Forma padrão

### ▷ Transformando para a forma padrão

Substituição de variáveis:

- ▶  $x_j \leq 0 \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = -x'_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $3x_1 + 5x_2 \leq 5, x_1 \leq 0 \Rightarrow -3x'_1 + 5x_2 \leq 5, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \leq 0 \Rightarrow -a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \geq l_j \Rightarrow$  Substituímos  $x_j = x'_j + l_j$ , sendo  $x'_j \geq 0$ :

Por exemplo:  $6x_1 - 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 3 \Rightarrow 6x'_1 - 2x_2 \leq -8, x'_1 \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1 \geq l_1 \Rightarrow a_{i1}x'_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i - a_{i1}l_1, x'_1 \geq 0$ .

- ▶  $x_j \leq u_j$ : Tratar como nova restrição do problema (em vez de limitante).

- ▶  $x_j$  livre  $\Rightarrow$  Substituímos por  $x_j = x_j^+ - x_j^-$ , sendo  $x_j^+, x_j^- \geq 0$ :

Por ex.:  $2x_1 + 3x_2 \leq 5, x_1$  livre  $\Rightarrow 2x_1^+ - 2x_1^- + 3x_2 \leq 5, x_1^+, x_1^- \geq 0$ ;

$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, x_1$  livre  $\Rightarrow a_{i1}x_1^+ - a_{i1}x_1^- + \dots \leq b_i, x_1^+, x_1^- \geq 0$ .



# Forma padrão

## ▷ Exemplo

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0.5x_1 + 0.3x_2 \leq 3$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 \geq 1$$

$$0.4x_1 + 0.5x_2 = 1$$

$$x_1 \text{ livre}, x_2 \geq 2.$$

## Forma padrão

### ▷ Exemplo

$$\begin{aligned} -\min \quad & -3x_1^+ + 3x_1^- - 2x_2' - 4 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1^+ - 0,5x_1^- + 0,3x_2' + x_1^a = 2,4 \\ & 0,1x_1^+ - 0,1x_1^- + 0,2x_2' - x_2^a = 0,6 \\ & 0,4x_1^+ - 0,4x_1^- + 0,5x_2' = 0 \\ & x_1^+, x_1^-, x_2', x_1^a, x_2^a \geq 0. \end{aligned}$$

## Forma padrão

▷ Exercício: Transforme para a forma padrão

$$(a) \max \quad f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

$$\text{s.a} \quad 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 7$$

$$3x_1 - 5x_2 + 5x_3 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \text{ livre}$$

$$(b) \max \quad f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

$$\text{s.a} \quad 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7$$

$$3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$-4x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -4$$

$$x_1 \geq -2, 0 \leq x_2 \leq 4, x_3 \geq 0$$

## Forma padrão

▷ Exercícios: Transforme para a forma padrão

$$\begin{aligned} \text{(a) max} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 7 \\ & 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \text{ livre} \end{aligned}$$

## Forma padrão

▷ Exercícios: Transforme para a forma padrão

Substituindo  $x_2 = x'_2 + 2$ ,  $x_3 = x_3^+ - x_3^-$  e adicionando  $x_1^a$  e  $x_2^a$ :

## Forma padrão

▷ Exercícios: Transforme para a forma padrão

Substituindo  $x_2 = x'_2 + 2$ ,  $x_3 = x_3^+ - x_3^-$  e adicionando  $x_1^a$  e  $x_2^a$ :

$$\begin{aligned} -\min \quad & 5x_1 + 3x'_2 - 7x_3^+ + 7x_3^- + 6 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 - 4x'_2 - 6x_3^+ + 6x_3^- + x_1^a = 1 \\ & 3x_1 - 5x'_2 + 5x_3^+ - 5x_3^- + x_2^a = 15 \\ & x_1, x'_2, x_3^+, x_3^-, x_1^a, x_2^a \geq 0. \end{aligned}$$

## Forma padrão

▷ Exercícios: Transforme para a forma padrão

$$\begin{aligned} \text{(b) max } & f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a} & \quad 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \\ & \quad 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & \quad -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -4 \\ & \quad x_1 \geq -2, 0 \leq x_2 \leq 4, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## Forma padrão

▷ Exercícios: Transforme para a forma padrão

Substituindo  $x_1 = x'_1 - 2$  e adicionando  $x_2^a, x_3^a, x_4^a$ :



## Forma padrão

▷ Exercícios: Transforme para a forma padrão

Substituindo  $x_1 = x'_1 - 2$  e adicionando  $x_2^a, x_3^a, x_4^a$ :

$$-\min \quad -2x'_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4$$

$$\text{s.a} \quad 2x'_1 + 4x_2 + 6x_3 = 11$$

$$3x'_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_2^a = 11$$

$$4x'_1 + 9x_2 - 4x_3 - x_3^a = 12$$

$$x_2 + x_4^a = 4$$

$$x'_1, x_2, x_3, x_3, x_2^a, x_3^a, x_4^a \geq 0.$$

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?