Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 1.5: Notação matricial, operações com matrizes e soluções básicas em programação linear

Objetivos deste tópico

- Compreender como usar a notação matricial e realizar operações com matrizes;
- Estudar o conceito de base, solução geral e solução básica.

Notação matricial

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

sendo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \; c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Notação matricial

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$x =$

Notação matricial

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

Notação matricial

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c =
$$

Notação matricial

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

Notação matricial

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A =$$

Notação matricial

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Notação matricial

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b =$$

Notação matricial

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 = 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 = 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Notação matricial

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

Notação matricial

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\Rightarrow f(x) = [-3,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0]$$

Notação matricial

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\Rightarrow f(x) = [-3,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\Rightarrow f(x) = [-3,\ -2,\ 0,\ 0,\ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x) = c^T x$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{cases}$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \qquad + x_4 & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} =$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \qquad + x_4 & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Ax = b$$

Notação matricial

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \quad + x_4 & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \quad\quad + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b$$

Notação matricial

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = b$$

$$A = [a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5]$$

Notação algébrica

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i = b_1 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{2i} x_i = b_2 \\
& \vdots \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{mi} x_i = b_m \\
& x_i \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Notação algébrica

$$
\begin{array}{lrl}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j, & \forall j = 1, \ldots, m, \\
& x_i \geq 0, & \forall i = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Notação matricial

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & f(x) = c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

sendo:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}} + a_1 x_1 + a_4 x_4 = b$$

com $A_{\mathcal{B}} = [a_3 \ a_2 \ a_5]$ e $x_{\mathcal{B}} = [x_3 \ x_2 \ x_5]^T$

Notação matricial

Podemos ter uma submatriz agrupando algumas colunas. Por exemplo, para um dado subconjunto ordenado de índices $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Bx_{\mathcal{B}} + a_1 x_1 + a_4 x_4 = b$$

definindo $B := A_{\mathcal{B}}$

Notação matricial

Essa submatriz pode ajudar a determinar o valor de $x_{\mathcal{B}}$. Como?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$Bx_{\mathcal{B}} = b - a_1x_1 - a_4x_4$$

Notação matricial

Se ela for invertível, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 \right)$$

$$B^{-1}\left(Bx_{\mathcal{B}} = b - a_1x_1 - a_4x_4\right)$$

Notação matricial

Se ela for invertível, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 \right)$$

$$B^{-1} \left(B x_{\mathcal{B}} = b - a_1 x_1 - a_4 x_4 \right)$$

Nesse caso, chamamos $\mathcal{B}$ de base (submatriz invertível).

Notação matricial

Se ela for invertível, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_4x_4$$

Nesse caso, chamamos $\mathcal{B}$ de base (submatriz invertível).

Notação matricial

Se ela for invertível, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_4x_4$$

Nesse caso, chamamos $\mathcal{B}$ de base (submatriz invertível).

Notação matricial

Se ela for invertível, deixamos apenas o vetor $x_{\mathcal{B}}$ do lado esquerdo:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}5 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_4x_4$$

Nesse caso, chamamos $\mathcal{B}$ de base (submatriz invertível).

Notação matricial

▷ Solução geral

- Se definirmos $\mathcal{N}$ com os índices das variáveis que **não** estão em $\mathcal{B}$, então

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1}a_j x_j$$

é a **solução geral** do sistema de equações $Ax = b$, em que $x_{\mathcal{B}}$ fica *determinado de forma única se atribuirmos valores* a $x_{\mathcal{N}}$;

Notação matricial

▷ Solução geral

- Se definirmos $\mathcal{N}$ com os índices das variáveis que **não** estão em $\mathcal{B}$, então

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1} a_j x_j$$

  é a **solução geral** do sistema de equações $Ax = b$, em que $x_{\mathcal{B}}$ fica *determinado de forma única se atribuirmos valores* a $x_{\mathcal{N}}$;

- Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}5 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix} x_4$$

Notação matricial

▷ Solução geral

- Se definirmos $\mathcal{N}$ com os índices das variáveis que **não** estão em $\mathcal{B}$, então

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1} a_j x_j$$

é a **solução geral** do sistema de equações $Ax = b$, em que $x_{\mathcal{B}}$ fica *determinado de forma única se atribuirmos valores* a $x_{\mathcal{N}}$;

- Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}5 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix} x_4$$

- Por exemplo: para $x_1 = x_4 = 0$, temos a solução $x = (0;\ 5;\ 1{,}5;\ 0;\ 0{,}5)$;

Notação matricial

▷ Solução geral

- Se definirmos $\mathcal{N}$ com os índices das variáveis que **não** estão em $\mathcal{B}$, então

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - \sum_{j \in \mathcal{N}} B^{-1} a_j x_j$$

é a **solução geral** do sistema de equações $Ax = b$, em que $x_{\mathcal{B}}$ fica *determinado de forma única se atribuirmos valores* a $x_{\mathcal{N}}$;

- Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}5 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix} x_4$$

- Por exemplo: para $x_1 = x_4 = 0$, temos a solução $x = (0;\ 5;\ 1{,}5;\ 0;\ 0{,}5)$;
- Outro exemplo: $x = 1$ e $x_4 = 0$, temos $x = (1;\ 4{,}5;\ 1{,}15;\ 0;\ 0{,}35)$.

Notação matricial

▷ Solução básica

- Se na solução geral, fixarmos $x_{\mathcal{N}} = 0$, obtemos a **solução básica**:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, \quad \bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$$

que é uma solução particular do sistema $Ax = b$.

Notação matricial

▷ Solução básica

- Se na solução geral, fixarmos $x_{\mathcal{N}} = 0$, obtemos a **solução básica**:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, \quad \bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$$

  que é uma solução particular do sistema $Ax = b$.

- Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}5 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix} x_4, \quad \text{com } x_1 = x_4 = 0$$

Notação matricial

▷ Solução básica

- Se na solução geral, fixarmos $x_{\mathcal{N}} = 0$, obtemos a **solução básica**:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b, \quad \bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$$

  que é uma solução particular do sistema $Ax = b$.

- Para o problema da ligas metálicas com $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos $\mathcal{N} = \{1, 4\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

▷ Observações

- Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.

Notação matricial

▷ Observações

- Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2$$

Notação matricial

▷ Observações

- Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2$$

- Se $x_1 = x_2 = 0$, então temos a solução $x = (0;\ 0;\ 3;\ 1;\ 3)$;

Notação matricial

▷ Observações

- Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2$$

- Se $x_1 = x_2 = 0$, então temos a solução $x = (0;\ 0;\ 3;\ 1;\ 3)$;
- Se $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, temos $x = (1;\ 1;\ 2{,}2;\ 0{,}7;\ 2{,}1)$;

Notação matricial

▷ Observações

- Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2$$

- Se $x_1 = x_2 = 0$, então temos a solução $x = (0;\ 0;\ 3;\ 1;\ 3)$;
- Se $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, temos $x = (1;\ 1;\ 2{,}2;\ 0{,}7;\ 2{,}1)$;
- No caso geral, quantos elementos em $\mathcal{B}$?

Notação matricial

▷ Observações

- Podemos escrever a solução geral para *diferentes bases*, isto é, outros subconjuntos $\mathcal{B}$ tais que $A_{\mathcal{B}}$ é *invertível*.
- Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2$$

- Se $x_1 = x_2 = 0$, então temos a solução $x = (0;\ 0;\ 3;\ 1;\ 3)$;
- Se $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, temos $x = (1;\ 1;\ 2{,}2;\ 0{,}7;\ 2{,}1)$;
- No caso geral, quantos elementos em $\mathcal{B}$?
  O mesmo número de equações.

Notação matricial

▷ Observações

- Quando o *número variáveis é igual ao número de equações* não há grau de liberdade para escolha das bases. Assim, o sistema pode ter no máximo 1 base, ou seja, no máximo uma solução factível. Portanto, *se houver solução, ela é única*!

Notação matricial

▷ Observações

- Quando o *número variáveis é* *igual* *ao número de equações* não há grau de liberdade para escolha das bases. Assim, o sistema pode ter no máximo 1 base, ou seja, no máximo uma solução factível. Portanto, *se houver solução, ela é única*! Por exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 9 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Notação matricial

▷ Observações

- Quando o *número variáveis é* *igual* *ao número de equações* não há grau de liberdade para escolha das bases. Assim, o sistema pode ter no máximo 1 base, ou seja, no máximo uma solução factível. Portanto, *se houver solução, ela é única*! Por exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 9 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Notação matricial

▷ Observações

- Quando o *número variáveis é igual ao número de equações* não há grau de liberdade para escolha das bases. Assim, o sistema pode ter no máximo 1 base, ou seja, no máximo uma solução factível. Portanto, *se houver solução, ela é única*! Por exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 9 \\ 1x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Quando o *número variáveis é maior que o número de equações*, pode-se ter várias bases diferentes e, assim, há um grau de liberdade para escolha das soluções, indicando que o sistema possui *múltiplas soluções factíveis*.

Notação matricial

▷ Observações

- No caso do sistema de equações do problema das ligas metálicas, temos 5 variáveis e 3 equações, indicando que temos um grau de liberdade para definir uma solução para o sistema (ou seja, pode existir mais de uma solução que satisfaça o sistema);

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & & & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 & + x_4 & & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 & & + x_5 & = 3 \end{cases}$$

Notação matricial

▷ Observações

- No caso do sistema de equações do problema das ligas metálicas, temos 5 variáveis e 3 equações, indicando que temos um grau de liberdade para definir uma solução para o sistema (ou seja, pode existir mais de uma solução que satisfaça o sistema);

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + x_3 & = 3 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_4 & = 1 \\ 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 + x_5 & = 3 \end{cases}$$

- O grau de liberdade é 2 (=5-3), indicando que há mais de uma solução factível para o sistema. Ao definirmos uma base $\mathcal{B}$, os valores de $x_{\mathcal{B}}$ ficam determinados de forma única ao atribuirmos valores para as duas outras coordenadas, resultando em diferentes pontos factíveis.

Notação matricial

▷ Observações

Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$, temos:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} x_2$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_2x_2$$

Notação matricial

▷ Observações

Por exemplo, para a base $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$, temos:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}5 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b - B^{-1}a_1x_1 - B^{-1}a_4x_4$$

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?