Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 10.1: O problema de dimensionamento de lotes

Objetivos deste tópico

- Estudar o problema de dimensionamento de lotes e aplicações;
- Aprender a modelar matematicamente algumas variantes desse problema.

Planejamento dinâmico

A demanda do produto varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

Planejamento dinâmico

A demanda do produto varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- d_{it}: demanda do produto i no período t, $t = 1, \ldots, T$.

Planejamento dinâmico

A demanda do produto varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- d_{it}: demanda do produto i no período t, $t = 1, \ldots, T$.
- Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)?

Planejamento dinâmico

A demanda do produto varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- d_{it}: demanda do produto i no período t, $t = 1, \ldots, T$.
- Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)? Estoques!

Planejamento dinâmico

A demanda do produto varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- d_{it}: demanda do produto i no período t, $t = 1, \ldots, T$.
- Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)? Estoques!
- Há um custo de estocagem, além do custo de produção;

Planejamento dinâmico

A demanda do produto varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- d_{it}: demanda do produto i no período t, $t = 1, \ldots, T$.
- Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)? Estoques!
- Há um custo de estocagem, além do custo de produção;
- Pode envolver restrições de capacidade máxima, custos e tempo de preparação (*setup*), entre outros requisitos;

Planejamento dinâmico

A demanda do produto varia ao longo do **horizonte de planejamento**, que é dividido em períodos. Deseja-se determinar quanto produzir em cada período.

- d_{it}: demanda do produto i no período t, $t = 1, \ldots, T$.
- Como viabilizar a produção em períodos anteriores à demanda (p.ex., em períodos com maior folga ou menor custo de produção)? Estoques!
- Há um custo de estocagem, além do custo de produção;
- Pode envolver restrições de capacidade máxima, custos e tempo de preparação (*setup*), entre outros requisitos;
- Busca-se um *trade-off* entre os custos envolvidos.

Planejamento dinâmico

▷ Estratégias simples

Planejamento dinâmico

▷ Estratégias simples

- Produção lote-por-lote:
  A cada período, produz exatamente a quantidade demandada, isto é, produz d_{it} unidades do produto i no período t.

Planejamento dinâmico

▷ Estratégias simples

- Produção lote-por-lote:
  A cada período, produz exatamente a quantidade demandada, isto é, produz d_{it} unidades do produto i no período t.

Exemplo de produção de um produto:

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda	7	4	0	12	17	22	28	19	12	9	9	6
Produção	7	4	0	12	17	22	28	19	12	9	9	6
Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Planejamento dinâmico

▷ Estratégias simples

- Produção em período fixo:
  Produz a cada P períodos a quantidade correspondente à demanda do período atual e dos próximos $P-1$ períodos. Assim, ocorre produção apenas nos períodos $1, (1+P), (1+2P), ...$

Planejamento dinâmico

▷ Estratégias simples

- Produção em período fixo:
  Produz a cada P períodos a quantidade correspondente à demanda do período atual e dos próximos $P-1$ períodos. Assim, ocorre produção apenas nos períodos $1, (1+P), (1+2P), \ldots$.

Exemplo de produção de um produto com $P = 3$:

Período	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda	7	4	0	12	17	22	28	19	12	9	9	6
Produção	11	0	0	51	0	0	59	0	0	24	0	0
Estoque	4	0	0	39	22	0	31	12	0	15	6	0

Planejamento dinâmico

▷ Estratégias simples

- Quais as desvantagens/limitações dessas estratégias?

Planejamento dinâmico

▷ Estratégias simples

- Quais as desvantagens/limitações dessas estratégias?
- E se tivermos capacidade máxima de produção?

Planejamento dinâmico

▷ Estratégias simples

- Quais as desvantagens/limitações dessas estratégias?
- E se tivermos capacidade máxima de produção?
- E quanto aos custos de estocagem e preparação de máquinas?

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

- Considera o planejamento da produção envolvendo um conjunto de produtos em um horizonte de planejamento dividido em períodos (turnos, dias, semanas, ...);

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

- Considera o planejamento da produção envolvendo um conjunto de produtos em um horizonte de planejamento dividido em períodos (turnos, dias, semanas, ...);
- A demanda de cada produto em cada período é conhecida;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

- Considera o planejamento da produção envolvendo um conjunto de produtos em um horizonte de planejamento dividido em períodos (turnos, dias, semanas, ...);
- A demanda de cada produto em cada período é conhecida;
- Determinar quanto produzir e quanto estocar de cada produto em cada período do horizonte do planejamento, de modo a satisfazer a demanda de cada período, buscando-se minimizar os custos;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

- Podem considerar várias características reais:
  - Custos de produção e de estocagem;
  - Limitação de recursos (capacidade);
  - Produção de lotes multi-estágio;
  - Custos e tempo de preparação (*setup*);
  - Custos adicionais de hora-extra;
  - ...

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Exemplo

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

	Bebida 1			Bebida 2		
Período	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—
Custo prep (R$)	2.0	4.0	4.0	8.0	8.0	8.0

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Exemplo (simplificado)

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. ~~A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2.~~ A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

	Bebida 1			Bebida 2		
Período	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$;
- Conjunto de períodos: $\mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
- Conjunto de períodos: $\mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$;
- d_{it}: demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
- Conjunto de períodos: $\mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$;
- d_{it}: demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- c_{it}: custo de produzir 1 unidade do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
- Conjunto de períodos: $\mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$;
- d_{it}: demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- c_{it}: custo de produzir 1 unidade do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- h_{it}: custo de manter em estoque 1 unid do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$.

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
- Conjunto de períodos: $\mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$;
- d_{it}: demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- c_{it}: custo de produzir 1 unidade do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- h_{it}: custo de manter em estoque 1 unid do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$.
- a_i: horas necessárias para produzir 1 un do prod $i \in \mathcal{P}$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Descrição geral

Assume que os recursos são limitados e considera custos de produção e estocagem. Busca-se minimizar o custo total de produção e estocagem, de modo a atender a demanda.

- Conjunto de produtos: $\mathcal{P} = \{1, \ldots, n\}$;
- Conjunto de períodos: $\mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$;
- d_{it}: demanda do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- c_{it}: custo de produzir 1 unidade do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- h_{it}: custo de manter em estoque 1 unid do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$.
- a_i: horas necessárias para produzir 1 un do prod $i \in \mathcal{P}$;
- b_t: horas disponíveis no período $t \in \mathcal{T}$.

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

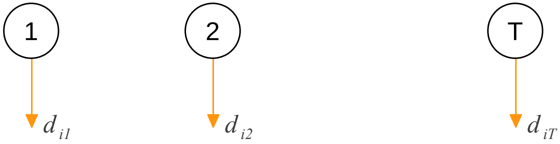
▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

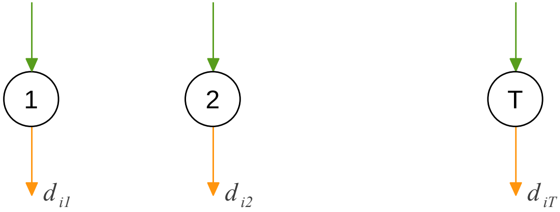
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

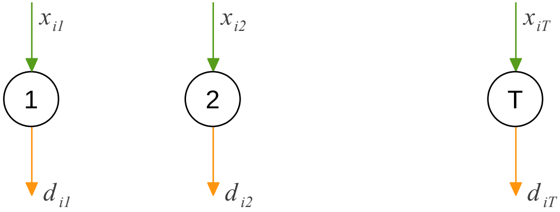
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

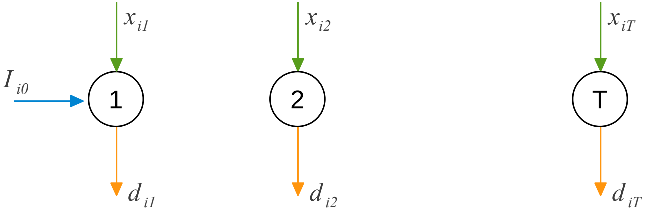
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

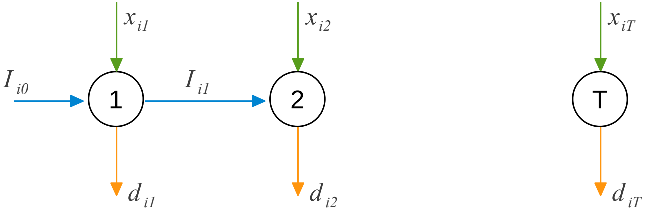
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

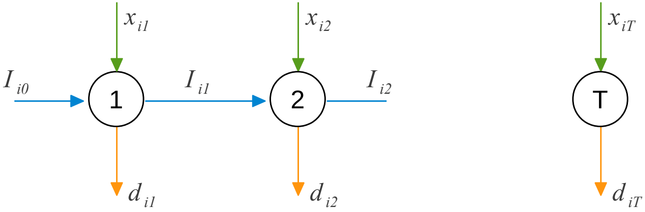
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

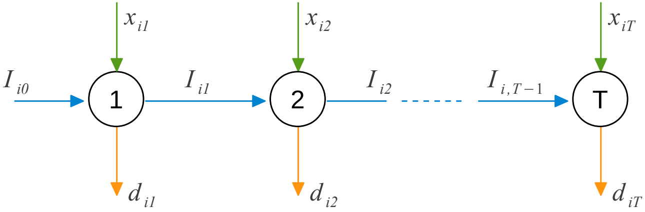
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

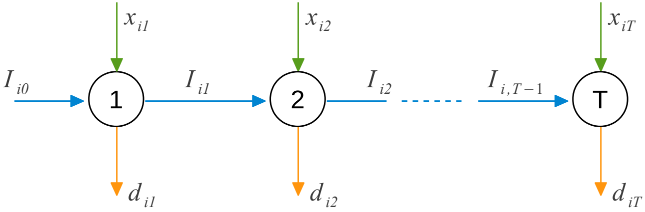
Variáveis de decisão:



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

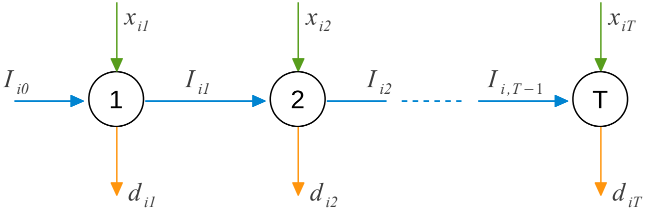


- x_{it}: qtd a ser produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:



- x_{it}: qtd a ser produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- I_{it}: qtd a ser estocada do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

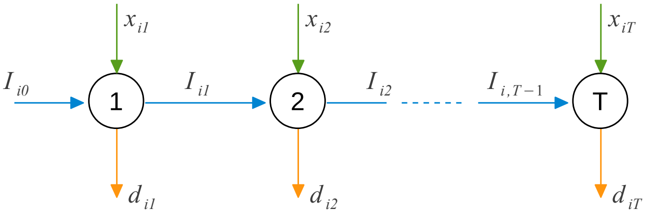
▷ Modelagem

Restrições:

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

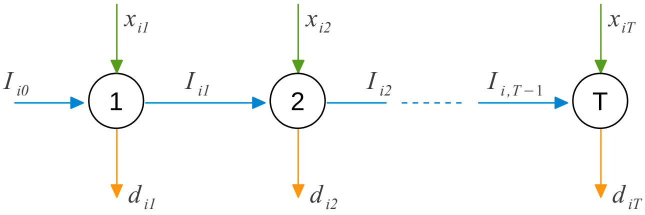
Restrições:



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

Restrições:

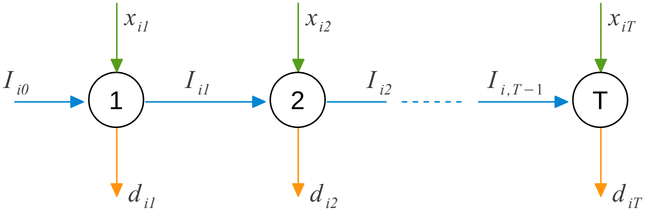


- Conservação de estoque:

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

Restrições:

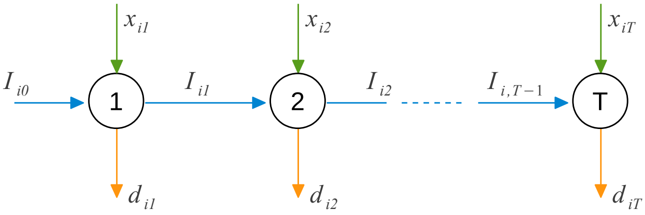


- Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

Restrições:

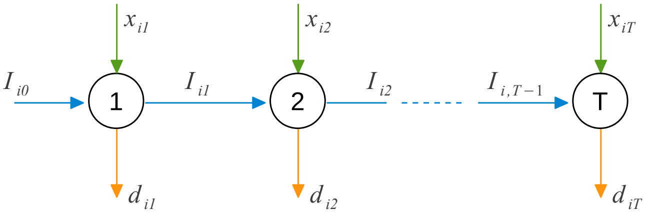


- Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;
- Atendimento da demanda:

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

Restrições:

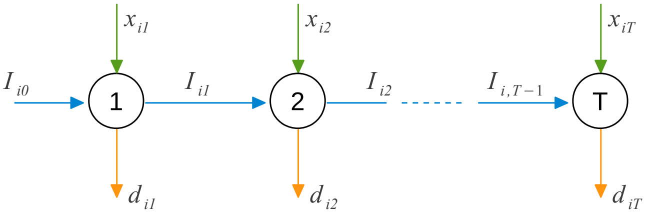


- Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;
- Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it}$

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

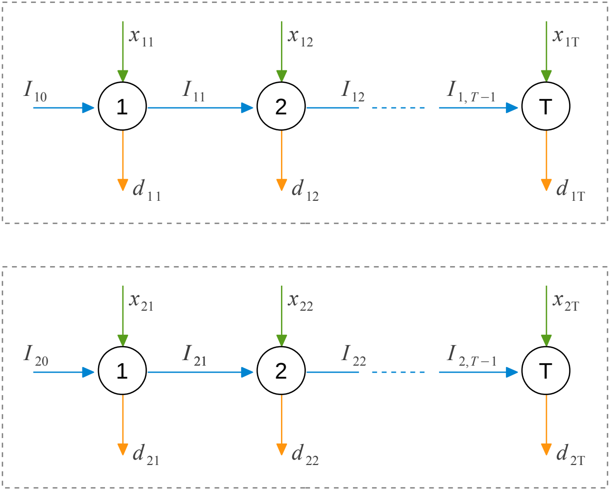
Restrições:



- Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;
- Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

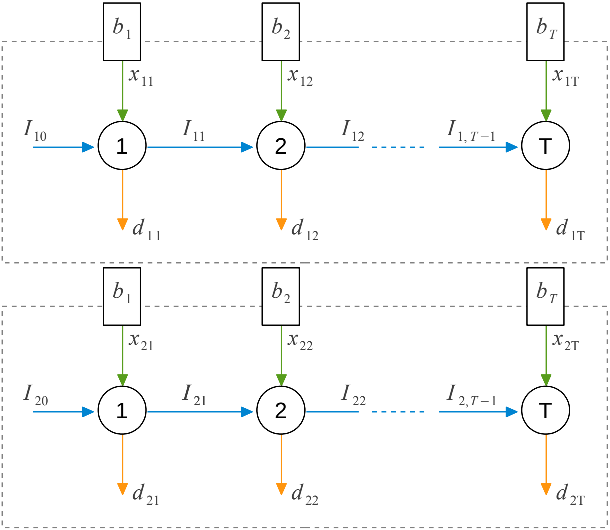
Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem



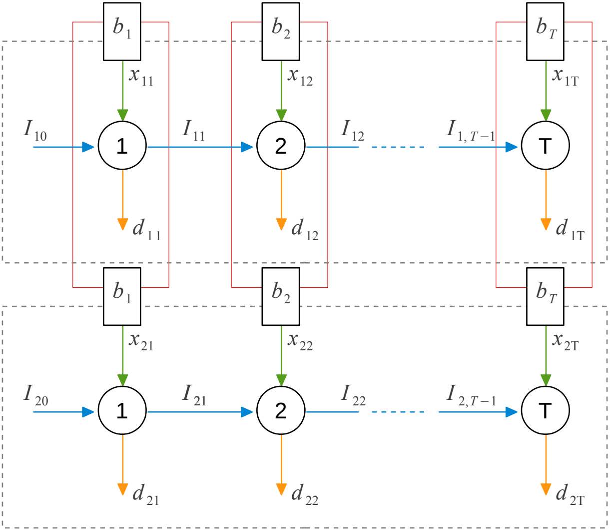
Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem



Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Capacidade máxima:

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Capacidade máxima: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t$;

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Capacidade máxima: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Capacidade máxima: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

- Custos:

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Capacidade máxima: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

- Custos:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} c_{it} x_{it}$$

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} + d_{it} = I_{i,t-1} + x_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Capacidade máxima: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

- Custos:

  $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}.$$

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

$$\min \quad \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{it} x_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_{it} I_{it}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, && i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T}, \\
& \sum_{i \in \mathcal{P}} a_i x_{it} \leq b_t, && t \in \mathcal{T}, \\
& I_{i0} = 0, && i \in \mathcal{P}, \\
& x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, && i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Modelagem

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{s.a} & x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, & i = 1,\ldots,n; & t = 1,\ldots,T, \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \le b_t, & t = 1,\ldots,T, & \\
& I_{i0} = 0, & i = 1,\ldots,n, & \\
& x_{it} \ge 0, I_{it} \ge 0, & i = 1,\ldots,n; & t = 1,\ldots,T.
\end{array}$$

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Exemplo (simplificado): modelo com dados

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 1{,}0x_{11} + 1{,}5x_{12} + 2{,}0x_{13} + 0{,}5x_{21} + 0{,}5x_{22} + 0{,}9x_{23} \\
& \quad +0{,}5I_{11} + 0{,}25I_{12} + 0{,}25I_{21} + 0{,}25I_{22} \\
\text{s.a} & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& 0{,}1x_{11} + 0{,}08x_{21} \leq 240 \\
& 0{,}1x_{12} + 0{,}08x_{22} \leq 320 \\
& 0{,}1x_{13} + 0{,}08x_{23} \leq 200 \\
& I_{10} = 0 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes (PDL)

▷ Exemplo (simplificado)

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. ~~A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2.~~ A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

	Bebida 1			Bebida 2		
Período	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Exemplo

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

	Bebida 1			Bebida 2		
Período	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—
Custo prep (R$)	2.0	4.0	4.0	8.0	8.0	8.0

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- Considera tempos e custos de preparação da máquina.

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- Considera tempos e custos de preparação da máquina.
- Busca-se minimizar o custo total de produção, estocagem e preparação, de modo a atender a demanda.

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- Considera tempos e custos de preparação da máquina.
- Busca-se minimizar o custo total de produção, estocagem e preparação, de modo a atender a demanda.
- s_{it}: custo de preparação para a fabricação do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Descrição geral

- Considera tempos e custos de preparação da máquina.
- Busca-se minimizar o custo total de produção, estocagem e preparação, de modo a atender a demanda.
- s_{it}: custo de preparação para a fabricação do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;
- st_i: tempo de preparação para a fabricação do produto $i \in \mathcal{P}$.

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_{it}: qtd a ser produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

  I_{it}: qtd a ser estocada do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_{it}: qtd a ser produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

  I_{it}: qtd a ser estocada do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

  y_{it}:

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_{it}: qtd a ser produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

  I_{it}: qtd a ser estocada do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

  y_{it}: 1, se $x_{it} > 0$; 0, caso contrário.

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Variáveis de decisão:

  x_{it}: qtd a ser produzida do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

  I_{it}: qtd a ser estocada do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$;

  y_{it}: 1, se $x_{it} > 0$; 0, caso contrário.

  (ou seja, $y_{it} = 1$ se, e somente se, há produção do produto $i \in \mathcal{P}$ no período $t \in \mathcal{T}$)

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Restrições:

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

  Preparação (*setup*):

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

  Preparação (*setup*): $x_{it} \leq C y_{it}$,

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

  Preparação (*setup*): $x_{it} \leq C y_{it},$ (C suficientemente grande)

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

  Preparação (*setup*): $x_{it} \leq C y_{it}$, (C suficientemente grande)

  Capacidade máxima:

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Restrições:

  Conservação de estoque: $I_{it} = I_{i,t-1} + x_{it} - d_{it}$;

  Atendimento da demanda: $I_{i,t-1} + x_{it} \geq d_{it} \Rightarrow I_{it} \geq 0$;

  Produção não-negativa: $x_{it} \geq 0$.

  Preparação (*setup*): $x_{it} \leq C y_{it}$, (C suficientemente grande)

  Capacidade máxima: $\sum_{i=1}^{n} (a_i x_{it} + st_i y_{it}) \leq b_t$

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Custos:

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

- Custos:

$$\sum_{i\in\mathcal{P}}\sum_{t\in\mathcal{T}} c_{it}x_{it} + \sum_{i\in\mathcal{P}}\sum_{t\in\mathcal{T}} h_{it}I_{it} + \sum_{i\in\mathcal{P}}\sum_{t\in\mathcal{T}} s_{it}y_{it}.$$

PDL com tempo e custo de preparação

▷ Modelagem

$$\min \quad \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_{it} x_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} h_{it} I_{it} + \sum_{i \in \mathcal{P}} \sum_{t \in \mathcal{T}} s_{it} y_{it}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, && i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T}, \\
& \sum_{i \in \mathcal{P}} (a_i x_{it} + st_i y_{it}) \leq b_t, && t \in \mathcal{T}, \\
& x_{it} \leq C y_{it}, && i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T}, \\
& I_{i0} = 0, && i \in \mathcal{P}, \\
& x_{it} \geq 0, \; I_{it} \geq 0, \; y_{it} \in \{0, 1\} && i \in \mathcal{P}; \quad t \in \mathcal{T}.
\end{aligned}$$

PDL com restrição de capacidade e tempo de preparação

▷ Exemplo: modelo com dados

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1{,}0x_{11} + 1{,}5x_{12} + 2{,}0x_{13} + 0{,}5x_{21} + 0{,}5x_{22} + 0{,}9x_{23} \\
& +0{,}5I_{11} + 0{,}25I_{12} + 0{,}25I_{21} + 0{,}25I_{22} \\
& +2{,}0y_{11} + 4{,}0y_{12} + 4{,}0y_{13} + 8{,}0y_{21} + 8{,}0y_{22} + 8{,}0y_{23} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& \vdots \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& 0{,}1x_{11} + 0{,}08x_{21} + 12y_{11} + 8y_{21} \leq 240 \\
& 0{,}1x_{12} + 0{,}08x_{22} + 12y_{12} + 8y_{22} \leq 320 \\
& 0{,}1x_{13} + 0{,}08x_{23} + 12y_{13} + 8y_{23} \leq 200 \\
& x_{11} \leq 4500y_{11} \\
& x_{12} \leq 4500y_{12} \\
& \vdots \\
& x_{23} \leq 1800y_{23} \\
& I_{10} = 0 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23}, I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0 \\
& y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{23} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?