Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 10.2: O problema de corte de estoque

Objetivos deste tópico

- Estudar o problema de corte de estoque e suas aplicações;
- Aprender a modelar matematicamente esse problema de duas formas.

O problema de corte de estoque (PCE)

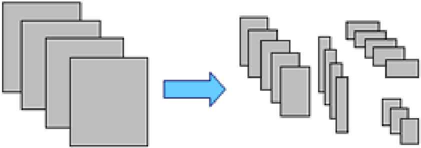
▷ Descrição geral

- Em diversos processos industriais, itens são produzidos a partir do corte de peças maiores;

O problema de corte de estoque (PCE)

▷ Descrição geral

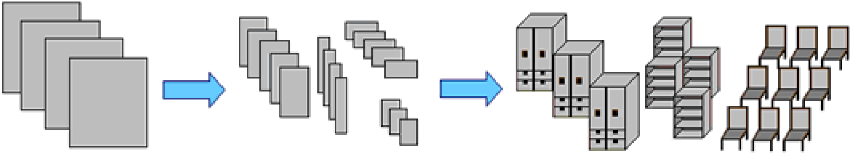
- Em diversos processos industriais, itens são produzidos a partir do corte de peças maiores;
- Por exemplo, em fábricas de móveis:



O problema de corte de estoque (PCE)

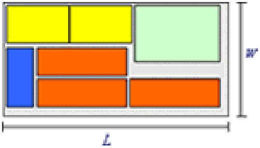
▷ Descrição geral

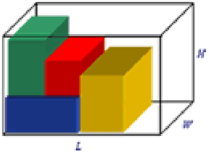
- Em diversos processos industriais, itens são produzidos a partir do corte de peças maiores;
- Por exemplo, em fábricas de móveis:

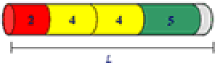


O problema de corte de estoque (PCE)

▷ Descrição geral







- 1D: Barras de aço, rolos de filmes, bobinas de papel, etc.
- 2D: Placas de madeira, tecido, chapas de aço, etc.
- 3D: Placas com diferentes espessuras, espumas para colchões, etc.

PCE unidimensional

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;
- Produzir m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \ldots, l_m$;

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;
- Produzir m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \ldots, l_m$;
- Demandas $d_1, d_2, \ldots, d_m$;

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;
- Produzir m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \ldots, l_m$;
- Demandas $d_1, d_2, \ldots, d_m$;
- O objetivo é minimizar o número de barras usadas.

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;
- Produzir m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \ldots, l_m$;
- Demandas $d_1, d_2, \ldots, d_m$;
- O objetivo é minimizar o número de barras usadas.

Variáveis de decisão:

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;
- Produzir m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \ldots, l_m$;
- Demandas $d_1, d_2, \ldots, d_m$;
- O objetivo é minimizar o número de barras usadas.

Variáveis de decisão:

- Conjuntos:

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;
- Produzir m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \ldots, l_m$;
- Demandas $d_1, d_2, \ldots, d_m$;
- O objetivo é minimizar o número de barras usadas.

Variáveis de decisão:

- Conjuntos: $I = \{1, \ldots, n\}, \quad J = \{1, \ldots, m\}$;

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;
- Produzir m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \ldots, l_m$;
- Demandas $d_1, d_2, \ldots, d_m$;
- O objetivo é minimizar o número de barras usadas.

Variáveis de decisão:

- Conjuntos: $I = \{1, \ldots, n\}, \quad J = \{1, \ldots, m\}$;
- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;

PCE unidimensional

▷ Modelagem

- n barras de tamanho L disponíveis em estoque;
- Produzir m tipos de itens com tamanhos $l_1, l_2, \ldots, l_m$;
- Demandas $d_1, d_2, \ldots, d_m$;
- O objetivo é minimizar o número de barras usadas.

Variáveis de decisão:

- Conjuntos: $I = \{1, \ldots, n\}, \quad J = \{1, \ldots, m\}$;
- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Restrições:

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Restrições:

- Atendimento da demanda:

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j, \; j \in J$;

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\displaystyle\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j, \; j \in J$;
- Tamanho da barra:

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\displaystyle\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j, \ j \in J$;
- Tamanho da barra: $\displaystyle\sum_{j \in J} l_j x_{ij} \leq L y_i, \ i \in I$;

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\displaystyle\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j, \; j \in J$;
- Tamanho da barra: $\displaystyle\sum_{j \in J} l_j x_{ij} \leq L y_i, \; i \in I$;
- Domínio das variáveis:

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j, \ j \in J$;
- Tamanho da barra: $\sum_{j \in J} l_j x_{ij} \leq L y_i, \ i \in I$;
- Domínio das variáveis: $y_i \in \{0, 1\}, \ x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, i \in I, j \in J$.

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Função objetivo:

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Função objetivo:

- Minimizar o número de barras usadas:

PCE unidimensional

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

- x_{ij}: número de vezes que o item $j \in J$ é cortado da barra $i \in I$;
- y_i: $1 \rightarrow$ barra $i \in I$ é usada; $0 \rightarrow$ caso contrário.

Função objetivo:

- Minimizar o número de barras usadas:

$$\text{min} \sum_{i \in I} y_i$$

PCE unidimensional

▷ Modelo algébrico

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & \displaystyle\sum_{i \in I} y_i & \\
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j, & j \in J, \\
& \displaystyle\sum_{j \in J} l_j x_{ij} \leq L y_i, & i \in I, \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, & i \in I; \quad j \in J, \\
& y_i \in \{0, 1\}, & i \in I.
\end{array}
$$

PCE unidimensional

▷ Exemplo

Uma fábrica de papel, trabalha com a produção de bobinas para impressoras. As encomendas para a próxima semana correspondem a 32 bobinas de 5 cm de largura, 16 bobinas de 7 cm de largura e 21 bobinas de 7,5 cm de largura. Essas bobinas são cortadas a partir de bobinas grandes disponíveis em estoques, todas com largura de 20 cm. Determine qual a melhor forma de atender às encomendas de modo a minimizar o número de bobinas grandes utilizadas.

PCE unidimensional

▷ Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i \in I} y_i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i \in I} x_{ij} \geq d_j, && j \in J, \\
& \sum_{j \in J} l_j x_{ij} \leq L y_i, && i \in I, \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, && i \in I; \quad j \in J, \\
& y_i \in \{0, 1\}, && i \in I.
\end{aligned}
$$

PCE unidimensional

▷ Exemplo

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 + y_2 + \ldots + y_{100} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{100,1} \geq 32, \\
& x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{100,2} \geq 16, \\
& x_{13} + x_{23} + \ldots + x_{100,3} \geq 21, \\
& 5x_{11} + 7x_{12} + 7.5x_{13} \leq 20y_1, \\
& 5x_{21} + 7x_{22} + 7.5x_{23} \leq 20y_2, \\
& \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& 5x_{100,1} + 7x_{100,2} + 7.5x_{100,3} \leq 20y_{100}, \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{100,3} \in \mathbb{Z}_+, \\
& y_1, y_2, \ldots, y_{100} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

PCE unidimensional

▷ Outra formulação

- Na prática, uma outra formulação é bastante usada para o PCE unidimensional;

PCE unidimensional

▷ Outra formulação

- Na prática, uma outra formulação é bastante usada para o PCE unidimensional;
- Nesta formulação, são considerados *padrões de corte*;

PCE unidimensional

▷ Outra formulação

- Na prática, uma outra formulação é bastante usada para o PCE unidimensional;
- Nesta formulação, são considerados *padrões de corte*;
- Padrões de corte correspondem às diferentes formas factíveis de se cortar as barras em estoque;

PCE unidimensional

▷ Outra formulação

- Na prática, uma outra formulação é bastante usada para o PCE unidimensional;
- Nesta formulação, são considerados *padrões de corte*;
- Padrões de corte correspondem às diferentes formas factíveis de se cortar as barras em estoque;
- Por exemplo, quais as formas possíveis de se cortar uma bobina de 20 cm em bobinas menores de 5, 7 e 7,5 cm?

PCE unidimensional

▷ Outra formulação

Padrões de corte

Padrão	5 cm	7 cm	7,5 cm	Total	Desperdício
1	4	0	0	20	0
2	1	2	0	19	1
3	1	0	2	20	0
4	1	1	1	19,5	0,5
5	2	1	0	17	3
6	2	0	1	17,5	2,5

PCE unidimensional

▷ Outra formulação

- Assim, expressamos um padrão de corte pela coluna:

PCE unidimensional

▷ Outra formulação

- Assim, expressamos um padrão de corte pela coluna:

$$a_i = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{número de vezes que o item } 1 \text{ é cortado.} \\ \\ \\ \rightarrow \text{número de vezes que o item } j \text{ é cortado.} \\ \\ \end{array}$$

- Se enumerarmos todos os padrões possíveis, o PCE pode ser visto como: *escolher o menor número de padrões de corte que atendem à demanda*.

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

Restrições:

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

Restrições:

- Atendimento da demanda:

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \ j \in J$;

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\displaystyle\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \ j \in J$;
- Domínio das variáveis:

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\displaystyle\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \; j \in J$;
- Domínio das variáveis: $x_i \in \mathbb{Z}_+, \; i \in I$.

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \; j \in J$;
- Domínio das variáveis: $x_i \in \mathbb{Z}_+, \; i \in I$.

Função objetivo:

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \ j \in J$;
- Domínio das variáveis: $x_i \in \mathbb{Z}_+, \ i \in I$.

Função objetivo:

- Minimizar o número de barras cortadas:

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

Conjuntos e variáveis de decisão:

- $J = \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ conjunto de itens;
- $I = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ conjunto de **padrões de corte**;
- x_i: número de barras cortadas conforme o padrão de corte $i \in I$;

Restrições:

- Atendimento da demanda: $\displaystyle\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \;\; j \in J$;
- Domínio das variáveis: $x_i \in \mathbb{Z}_+, \;\; i \in I$.

Função objetivo:

- Minimizar o número de barras cortadas: $\displaystyle\min \sum_{i \in I} x_i$.

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i \in I} x_i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \quad j \in J, \\
& x_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad i \in I.
\end{aligned}
$$

PCE unidimensional (formulação por colunas)

▷ Modelagem

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in I} x_i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \quad j \in J, \\
& x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i \in I.
\end{aligned}
$$

Em muitas situações práticas é possível relaxar a integralidade das variáveis (de ambos os modelos) e trabalhar com arredondamentos.

PCE unidimensional

▷ Exemplo

Uma fábrica de papel, trabalha com a produção de bobinas para impressoras. As encomendas para a próxima semana correspondem a 32 bobinas de 5 cm de largura, 16 bobinas de 7 cm de largura e 21 bobinas de 7,5 cm de largura. Essas bobinas são cortadas a partir de bobinas grandes disponíveis em estoques, todas com largura de 20 cm. Determine qual a melhor forma de atender às encomendas de modo a minimizar o número de bobinas grandes utilizadas.

PCE unidimensional

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i \in I} x_i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq d_j, \quad j \in J, \\
& x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad\quad i \in I.
\end{aligned}
$$

PCE unidimensional

Padrões de corte

Padrão	5 cm	7 cm	7,5 cm	Total	Desperdício
1	4	0	0	20	0
2	1	2	0	19	1
3	1	0	2	20	0
4	1	1	1	19,5	0,5
5	2	1	0	17	3
6	2	0	1	17,5	2,5

PCE unidimensional

▷ Modelo por colunas

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\
\text{s.a} \quad & 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 + 2x_6 \geq 32, \\
& 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 \geq 16, \\
& 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 1x_6 \geq 21, \\
& x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

PCE unidimensional

▷ Modelo por restrições

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & y_1 + y_2 + \ldots + y_{100} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{100,1} \geq 32, \\
& x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{100,2} \geq 16, \\
& x_{13} + x_{23} + \ldots + x_{100,3} \geq 21, \\
& 5x_{11} + 7x_{12} + 7{,}5x_{13} \leq 20y_1, \\
& 5x_{21} + 7x_{22} + 7{,}5x_{23} \leq 20y_2, \\
& \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& 5x_{100,1} + 7x_{100,2} + 7{,}5x_{100,3} \leq 20y_{100}, \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{100,3} \in \mathbb{Z}_+, \\
& y_1, y_2, \ldots, y_{100} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

PCE unidimensional

- E se quisermos minimizar o desperdício?

PCE unidimensional

Padrões de corte

Padrão	5 cm	7 cm	7,5 cm	Total	Desperdício
1	4	0	0	20	0
2	1	2	0	19	1
3	1	0	2	20	0
4	1	1	1	19,5	0,5
5	2	1	0	17	3
6	2	0	1	17,5	2,5

PCE unidimensional

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_2 + 0{,}5x_4 + 3x_5 + 2{,}5x_6 \\
\text{s.a} \quad & 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 + 2x_6 \geq 32, \\
& 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 \geq 16, \\
& 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 1x_6 \geq 21, \\
& x_1, \ldots, x_6 \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?