Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 11.1: Técnicas de Decomposição; Relaxação Lagrangiana; Teorema da Representação

Objetivos deste tópico

- Entender a importância da Relaxação Lagrangiana e suas aplicações;
- Estudar os conceitos básicos de Relaxação Lagrangiana e como aplicá-la a problemas de otimização;
- Estudar o método de plano de cortes para resolver o problema dual Lagrangiano.

Problemas de grande-porte

- Os softwares de otimização evoluíram bastante nas últimas décadas;

Problemas de grande-porte

- Os softwares de otimização evoluíram bastante nas últimas décadas;
- Vários problemas de otimização que modelam situações reais tratadas pela Pesquisa Operacional podem ser resolvidos em tempo razoável;

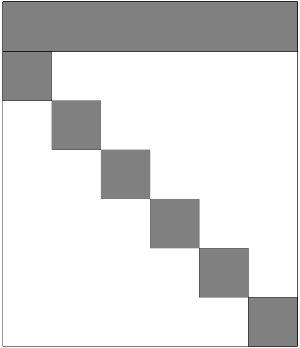
Problemas de grande-porte

- Os softwares de otimização evoluíram bastante nas últimas décadas;
- Vários problemas de otimização que modelam situações reais tratadas pela Pesquisa Operacional podem ser resolvidos em tempo razoável;
- Entretanto, algumas aplicações podem resultar em modelos extremamente complicados para os softwares atuais, podendo levar horas, dias, meses, ... para se obter uma solução ótima;

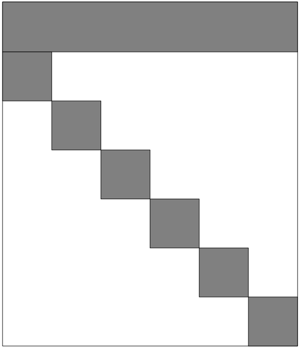
Problemas de grande-porte

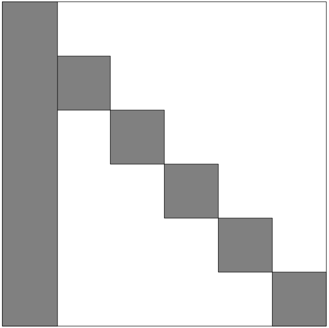
- Os softwares de otimização evoluíram bastante nas últimas décadas;
- Vários problemas de otimização que modelam situações reais tratadas pela Pesquisa Operacional podem ser resolvidos em tempo razoável;
- Entretanto, algumas aplicações podem resultar em modelos extremamente complicados para os softwares atuais, podendo levar horas, dias, meses, ... para se obter uma solução ótima;
- Por outro lado, muitos dos problemas que modelam situações reais possuem certas estruturas especiais que podem ser exploradas com o intuito de facilitar sua resolução.

Problemas de grande-porte



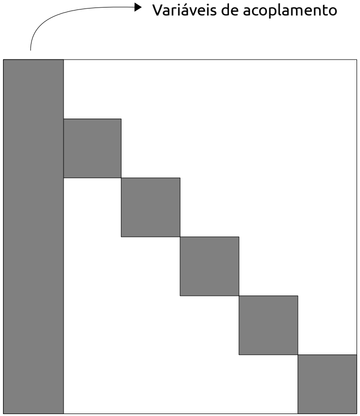
Problemas de grande-porte





Problemas de grande-porte

Problemas de grande-porte



Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e quanto estocar de cada bebida em cada período.

	Bebida 1			Bebida 2		
Período	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Modelo: Formulação compacta

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t, && t = 1,\dots,T,\\
& x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, && i = 1,\dots,n; \quad t = 1,\dots,T,\\
& I_{i0} = 0, && i = 1,\dots,n,\\
& x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, && i = 1,\dots,n; \quad t = 1,\dots,T.
\end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: formulação compacta

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} \\
& +0.9x_{23} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\
& x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \; I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
0.1\,x_{11} & & & & & & 0.08\,x_{21} & & & & & & \leq 240 \\
& 0.1\,x_{12} & & & & & & 0.08\,x_{22} & & & & & \leq 320 \\
& & 0.1\,x_{13} & & & & & & 0.08\,x_{23} & & & & \leq 200 \\
x_{11} & & & I_{10}-I_{11} & & & & & & & & & = 900 \\
& x_{12} & & & I_{11}-I_{12} & & & & & & & & = 1800 \\
& & x_{13} & & & I_{12}-I_{13} & & & & & & & = 1800 \\
& & & & & & x_{21} & & & I_{20}-I_{21} & & & = 400 \\
& & & & & & & x_{22} & & & I_{21}-I_{22} & & = 600 \\
& & & & & & & & x_{23} & & & I_{22}-I_{23} & = 800
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
x_{11} & & & I_{10}-I_{11} & & & & & & & & & = 900 \\
& x_{12} & & & I_{11}-I_{12} & & & & & & & & = 1800 \\
& & x_{13} & & & I_{12}-I_{13} & & & & & & & = 1800 \\
& & & & & & x_{21} & & & I_{20}-I_{21} & & & = 400 \\
& & & & & & & x_{22} & & & I_{21}-I_{22} & & = 600 \\
& & & & & & & & x_{23} & & & I_{22}-I_{23} & = 800
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
x_{11} & & & I_{10} - I_{11} & & & & & & & & & = 900 \\
& x_{12} & & & I_{11} - I_{12} & & & & & & & & = 1800 \\
& & x_{13} & & & I_{12} - I_{13} & & & & & & & = 1800 \\
& & & & & & x_{21} & & & I_{20} - I_{21} & & & = 400 \\
& & & & & & & x_{22} & & & I_{21} - I_{22} & & = 600 \\
& & & & & & & & x_{23} & & & I_{22} - I_{23} & = 800
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
0.1\,x_{11} & & & & & & 0.08\,x_{21} & & & & & & \le 240 \\
 & 0.1\,x_{12} & & & & & & 0.08\,x_{22} & & & & & \le 320 \\
 & & 0.1\,x_{13} & & & & & & 0.08\,x_{23} & & & & \le 200 \\
x_{11} & & & I_{10}-I_{11} & & & & & & & & & = 900 \\
 & x_{12} & & & I_{11}-I_{12} & & & & & & & & = 1800 \\
 & & x_{13} & & & I_{12}-I_{13} & & & & & & & = 1800 \\
 & & & & & & x_{21} & & & I_{20}-I_{21} & & & = 400 \\
 & & & & & & & x_{22} & & & I_{21}-I_{22} & & = 600 \\
 & & & & & & & & x_{23} & & & I_{22}-I_{23} & = 800
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
0.1\,x_{11} & & & & & & 0.08\,x_{21} & & & & & & \leq 240 \\
 & 0.1\,x_{12} & & & & & & 0.08\,x_{22} & & & & & \leq 320 \\
 & & 0.1\,x_{13} & & & & & & 0.08\,x_{23} & & & & \leq 200 \\
x_{11} & & & I_{10}-I_{11} & & & & & & & & & = 900 \\
 & x_{12} & & & I_{11}-I_{12} & & & & & & & & = 1800 \\
 & & x_{13} & & & I_{12}-I_{13} & & & & & & & = 1800 \\
 & & & & & & x_{21} & & & I_{20}-I_{21} & & & = 400 \\
 & & & & & & & x_{22} & & & I_{21}-I_{22} & & = 600 \\
 & & & & & & & & x_{23} & & & I_{22}-I_{23} & = 800
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

- Esse problema possui uma estrutura adequada ao uso de duas reformulações: relaxação Lagrangiana e decomposição de Dantzig-Wolfe;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

- Esse problema possui uma estrutura adequada ao uso de duas reformulações: relaxação Lagrangiana e decomposição de Dantzig-Wolfe;
- Essas reformulações são usadas quando há um conjunto de restrições de acoplamento e blocos de variáveis que seriam independentes sem esse acoplamento;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

- Esse problema possui uma estrutura adequada ao uso de duas reformulações: relaxação Lagrangiana e decomposição de Dantzig-Wolfe;
- Essas reformulações são usadas quando há um conjunto de restrições de acoplamento e blocos de variáveis que seriam independentes sem esse acoplamento;
- É importante que os blocos isolados correspondam a problemas que possam ser resolvidos de forma eficiente (ou por algum algoritmo especializado que tenha desempenho superior);

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

- Esse problema possui uma estrutura adequada ao uso de duas reformulações: relaxação Lagrangiana e decomposição de Dantzig-Wolfe;
- Essas reformulações são usadas quando há um conjunto de restrições de acoplamento e blocos de variáveis que seriam independentes sem esse acoplamento;
- É importante que os blocos isolados correspondam a problemas que possam ser resolvidos de forma eficiente (ou por algum algoritmo especializado que tenha desempenho superior);
- Outra vantagem aparece quando uma ou mais variáveis dos blocos são inteiras, pois resultam em formulações mais fortes.

Revisão

- Dualidade

Revisão

▷ Dualidade

- Considere que o seguinte problema possua solução ótima x^*:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Existe um vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ tal que o seguinte problema é equivalente:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x + (p^*)^T (b - Ax) \\ \text{s.a} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

Revisão

▷ Dualidade

- Para um vetor $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, temos uma relaxação:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x \mid Ax = b\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax) \mid Ax = b\} \\ &\geq \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax)\}. \end{aligned}$$

- Seja $g(p)$ o valor ótimo deste problema relaxado (em função de p), i.e.

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax)\}.$$

- Para qualquer $p \in \mathbb{R}^m$, temos $g(p) \leq f(x^*)$. Assim, temos um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.

Revisão

▷ Dualidade

Surgem então as questões:

- Qual será o vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ que resulta no melhor limitante inferior?
- Será que podemos garantir que $g(p^*) = f(x^*)$?

Melhor limitante:

$$\begin{aligned} g(p^*) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\}. \end{aligned}$$

Revisão

▷ Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$\begin{aligned}
g(p) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\} \\
&= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T b - p^T Ax\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \{c^T x - p^T Ax\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \{(c^T - p^T A)x\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (c_j - p^T a_j) x_j \right\} \\
&= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j.
\end{aligned}$$

Revisão

▷ Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \qquad (x_j = 0) \end{cases}$$

- Sempre que essa expressão resulta em $-\infty$, temos um limitante trivial; (lembre-se que estamos buscando o limitante máximo)
- Assim, queremos evitar esse tipo de limitante;
- Como? Basta restringirmos p t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$;
- Dessa forma, $\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = 0$.

Revisão

▷ Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j \\ &= p^T b \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$ t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} g(p^*) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{ g(p) \mid A^T p \leq c \} \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{ p^T b \mid A^T p \leq c \}. \end{aligned}$$

(problema dual)

Relaxação Lagrangiana

Relaxação Lagrangiana

- A Relaxação Lagrangiana é uma técnica de decomposição que vai funcionar de forma parecida;

Relaxação Lagrangiana

- A Relaxação Lagrangiana é uma técnica de decomposição que vai funcionar de forma parecida;
- A diferença é que vamos dualizar (relaxar) um **subconjunto** de restrições do problema!

Relaxação Lagrangiana

- A Relaxação Lagrangiana é uma técnica de decomposição que vai funcionar de forma parecida;
- A diferença é que vamos dualizar (relaxar) um **subconjunto** de restrições do problema!
- Em geral, vamos dualizar **apenas** as restrições complicantes (de acoplamento).

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: formulação compacta

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\
& x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \ I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exemplo: estrutura

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0.1\,x_{11} & & & & & & 0.08\,x_{21} & & & & \leq 240 \\
& 0.1\,x_{12} & & & & & & 0.08\,x_{22} & & & \leq 320 \\
& & 0.1\,x_{13} & & & & & & 0.08\,x_{23} & & \leq 200 \\
x_{11} & & & I_{10}-I_{11} & & & & & & & = 900 \\
& x_{12} & & & I_{11}-I_{12} & & & & & & = 1800 \\
& & x_{13} & & & I_{12}-I_{13} & & & & & = 1800 \\
& & & & & & x_{21} & & & I_{20}-I_{21} \quad & = 400 \\
& & & & & & & x_{22} & & I_{21}-I_{22} \quad & = 600 \\
& & & & & & & & x_{23} & I_{22}-I_{23} & = 800
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Multiplicadores $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & (1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& \quad +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22}) \\
& \quad +\bar{p}_1(240 - 0.1x_{11} - 0.08x_{21}) \\
& \quad +\bar{p}_2(320 - 0.1x_{12} - 0.08x_{22}) \\
& \quad +\bar{p}_3(200 - 0.1x_{13} - 0.08x_{23}) \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \ I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & (1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& \quad +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22}) \\
& \quad +\bar{p}_1(240 - 0.1x_{11} - 0.08x_{21}) \\
& \quad +\bar{p}_2(320 - 0.1x_{12} - 0.08x_{22}) \\
& \quad +\bar{p}_3(200 - 0.1x_{13} - 0.08x_{23}) \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \ I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 240\bar{p}_1 + 320\bar{p}_2 + 200\bar{p}_3 \\
& +(1.0 - 0.1\bar{p}_1)x_{11} + (1.5 - 0.1\bar{p}_2)x_{12} \\
& +(2.0 - 0.1\bar{p}_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
& +(0.5 - 0.08\bar{p}_1)x_{21} + (0.5 - 0.08\bar{p}_2)x_{22} \\
& +(0.9 - 0.08\bar{p}_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \ I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$240\bar{p}_1 + 320\bar{p}_2 + 200\bar{p}_3 +$$

$$\begin{aligned}
+ \text{ min} \quad & (1.0 - 0.1\bar{p}_1)x_{11} + (1.5 - 0.1\bar{p}_2)x_{12} \\
& +(2.0 - 0.1\bar{p}_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ \text{ min} \quad & (0.5 - 0.08\bar{p}_1)x_{21} + (0.5 - 0.08\bar{p}_2)x_{22} \\
& +(0.9 - 0.08\bar{p}_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- Subproblemas: menores e "fáceis" de serem resolvidos;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- Subproblemas: menores e "fáceis" de serem resolvidos;
- Para diferentes valores de $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, apenas a função objetivo dos subproblemas muda;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- Subproblemas: menores e "fáceis" de serem resolvidos;
- Para diferentes valores de $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, apenas a função objetivo dos subproblemas muda;
- Para quaisquer $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$, o valor obtido é um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$240\bar{p}_1 + 320\bar{p}_2 + 200\bar{p}_3 +$$

$$\begin{array}{lc}
+ \text{ min} & (1.0 - 0.1\bar{p}_1)x_{11} + (1.5 - 0.1\bar{p}_2)x_{12} \\
 & +(2.0 - 0.1\bar{p}_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
 & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
 & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
 & I_{10} = 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
 & I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lc}
+ \text{ min} & (0.5 - 0.08\bar{p}_1)x_{21} + (0.5 - 0.08\bar{p}_2)x_{22} \\
 & +(0.9 - 0.08\bar{p}_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
 & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
 & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
 & I_{20} = 0 \\
 & x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
 & I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{array}$$

(Fornece limitante inferior para quaisquer $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$)

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- $f_1(p) =$ valor ótimo do subproblema 1;
- $f_2(p) =$ valor ótimo do subproblema 2;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- $f_1(p) =$ valor ótimo do subproblema 1;
- $f_2(p) =$ valor ótimo do subproblema 2;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- $f_1(p) =$ valor ótimo do subproblema 1;
- $f_2(p) =$ valor ótimo do subproblema 2;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0, 0, 0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- $f_1(p) =$ valor ótimo do subproblema 1;
- $f_2(p) =$ valor ótimo do subproblema 2;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0,0,0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00
$(-1,-1,-1)$	-760	7200.00	1244.00	7684.00

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- $f_1(p) =$ valor ótimo do subproblema 1;
- $f_2(p) =$ valor ótimo do subproblema 2;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0, 0, 0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00
$(-1, -1, -1)$	-760	7200.00	1244.00	7684.00
$(-2, -1, 0)$	-800	7290.00	1276.00	7766.00

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- $f_1(p) =$ valor ótimo do subproblema 1;
- $f_2(p) =$ valor ótimo do subproblema 2;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0, 0, 0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00
$(-1, -1, -1)$	-760	7200.00	1244.00	7684.00
$(-2, -1, 0)$	-800	7290.00	1276.00	7766.00
$(-1.875, -1.875, 0)$	-1050	7593.75	1370.00	7913.75

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

Sejam:

- $f_0(p) = 240p_1 + 320p_2 + 200p_3$;
- $f_1(p) =$ valor ótimo do subproblema 1;
- $f_2(p) =$ valor ótimo do subproblema 2;

Para diferentes multiplicadores, obtemos:

p	f_0	f_1	f_2	limitante
$(0,0,0)$	0	6750.00	1100.00	7850.00
$(-1,-1,-1)$	-760	7200.00	1244.00	7684.00
$(-2,-1,0)$	-800	7290.00	1276.00	7766.00
$(-1.875,-1.875,0)$	-1050	7593.75	1370.00	7913.75

(valor ótimo do problema original: 7913.75)

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- Subproblemas: menores e "fáceis" de serem resolvidos;
- Para diferentes valores de $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, apenas a função objetivo dos subproblemas muda;
- Para quaisquer $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$, o valor obtido é um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

- Subproblemas: menores e “fáceis” de serem resolvidos;
- Para diferentes valores de $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, apenas a função objetivo dos subproblemas muda;
- Para quaisquer $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3 \leq 0$, o valor obtido é um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.
- Existem $p_1^*, p_2^*, p_3^* \leq 0$ tais que o valor obtido é igual ao valor ótimo do problema original!

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Relaxação Lagrangiana

$$\max_{p_1,p_2,p_3\leq 0} 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 +$$

$$\begin{aligned}
+ \text{ min} \quad & (1.0 - 0.1p_1)x_{11} + (1.5 - 0.1p_2)x_{12} \\
& +(2.0 - 0.1p_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ \text{ min} \quad & (0.5 - 0.08p_1)x_{21} + (0.5 - 0.08p_2)x_{22} \\
& +(0.9 - 0.08p_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & Dx = d, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x, & \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, & \text{(restrições de acoplamento)} \\ & Dx = d, & \text{(estrutura em blocos)} \\ & x \geq 0, & \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x, & \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, & \text{(restrições de acoplamento)} \\ & Dx = d, & \text{(estrutura em blocos)} \\ & x \geq 0, & \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} x = d, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = d, \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & f(x) = c^T x, \\
\text{s.a} & Ax = b, \\
& \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, \\
\text{s.a} & Ax = b, \\
& \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

(obs.: o sinal de transposto foi omitido para simplificar a notação)

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, \\
\text{s.a} & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K = b, \\
& \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
& x \geq 0
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{min} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K & & & & & \\
\text{s.a} & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K & & & & = b \\
 & D^1x^1 & & & & = d^1 \\
 & & D^2x^2 & & & = d^2 \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & D^Kx^K & = d^K \\
 & & x \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{array}{rlllll}
\min\limits_{x \geq 0} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K & & & & \\
\text{s.a} & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K & & & & = b \\
 & D^1x^1 & & & & = d^1 \\
 & & D^2x^2 & & & = d^2 \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & D^Kx^K & = d^K
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

$$
\begin{array}{rlllll}
g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K + \; p^T(b - A^1x^1 - A^2x^2 - \ldots - A^Kx^K) & & & & \\
\text{s.a} & D^1x^1 & & & & = d^1 \\
 & & D^2x^2 & & & = d^2 \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & D^Kx^K & = d^K
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

$$
\begin{array}{rllllll}
g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K + \ p^T(b - A^1x^1 - A^2x^2 - \ldots - A^Kx^K) & & & & \\
\text{s.a} & D^1x^1 & & & & = d^1 \\
& & D^2x^2 & & & = d^2 \\
& & & \ddots & & \vdots \\
& & & & D^Kx^K & = d^K
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rllllll}
g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & p^Tb + (c^1 - p^TA^1)x^1 + (c^2 - p^TA^2)x^2 + \ldots + (c^K - p^TA^K)x^K & & & & \\
\text{s.a} & D^1x^1 & & & & = d^1 \\
& & D^2x^2 & & & = d^2 \\
& & & \ddots & & \vdots \\
& & & & D^Kx^K & = d^K
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$g(p) = p^T b$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
g(p) \quad = \quad & p^T b \\
& + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
& + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\}
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
g(p) \quad = \quad & p^T b \\
& + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
& + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
& + \dots
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
g(p) \quad = \quad & p^T b \\
& + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
& + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
& + \dots \\
& + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\}
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
g(p) \quad = \quad & p^T b \\
& + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
& + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
& + \ldots \\
& + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
= \quad & p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
g(p) \quad = \quad & p^T b \\
& + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1) x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
& + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2) x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
& + \dots \\
& + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K) x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
= \quad & p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}
$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível:

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
g(p) \quad = \quad & p^T b \\
& + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
& + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
& + \dots \\
& + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
= \quad & p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}
$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) \quad = \quad & p^T b \\ & + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\ & + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\ & + \dots \\ & + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\ = \quad & p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \end{aligned}$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Problema Dual Lagrangiano:

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
g(p) \quad = \quad & p^T b \\
& + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
& + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
& + \ldots \\
& + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
= \quad & p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}
$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p)$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
g(p) \quad &= \quad p^T b \\
&\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
&\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
&= \quad p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}
$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$
\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- A dificuldade está em

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- A dificuldade está em determinar o vetor multiplicador ótimo p^*;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- A dificuldade está em determinar o vetor multiplicador ótimo p^*;
- Precisamos resolver os K subproblemas para cada vetor p que analisarmos;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- A dificuldade está em determinar o vetor multiplicador ótimo p^*;
- Precisamos resolver os K subproblemas para cada vetor p que analisarmos;
- Logo, precisamos ter alguma forma inteligente de determinar p^*;

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

- A relaxação Lagrangiana é apenas uma reformulação do problema;
- Não obtemos nenhuma solução, apenas reescrevemos o problema;
- Em vez de resolvermos uma formulação grande e difícil, resolvemos K subproblemas relativamente fáceis;
- A dificuldade está em determinar o vetor multiplicador ótimo p^*;
- Precisamos resolver os K subproblemas para cada vetor p que analisarmos;
- Logo, precisamos ter alguma forma inteligente de determinar p^*;
- Métodos mais usados: Planos de corte, Subgradiente;

Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

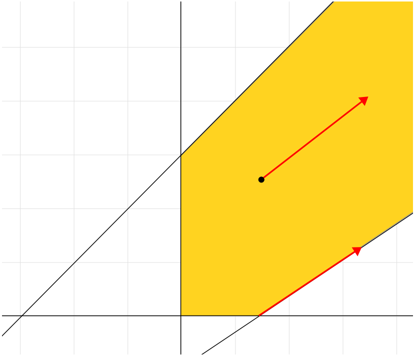
Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.



Revisão

▷ Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Definição: Raio de subida.

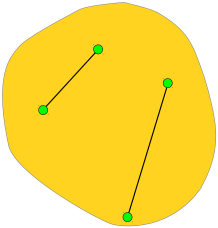
- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ contendo um raio $r \in \mathcal{S}$. Seja $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ um funcional linear arbitrário. Se $f(x + \varepsilon r) > f(x)$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$, então r é chamado de *raio de subida* de f.

Revisão

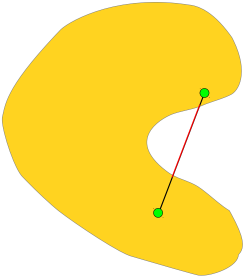
▷ Definições importantes em Otimização

Definição: Conjunto convexo.

- Um conjunto $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$ é *convexo* se para quaisquer $x, y \in \mathcal{S}$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$ tivermos que $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{S}$.



convexo



não-convexo

Revisão

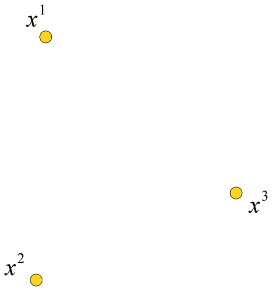
▷ Definições importantes em Otimização

Definição: Combinação convexa e envoltório convexo.

- Sejam os vetores $x^1, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Então:
  1. O vetor $y = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_k x^k$ é chamado de *combinação convexa* dos vetores $x^1, \ldots, x^k$;
  2. O *envoltório convexo* dos vetores $x^1, \ldots, x^k$ é o conjunto de todas as combinações convexas destes vetores.

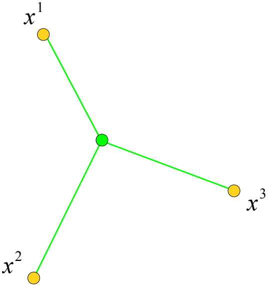
Revisão

▷ Definições importantes em Otimização



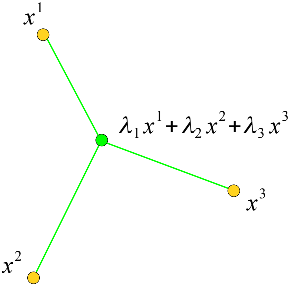
Revisão

▷ Definições importantes em Otimização



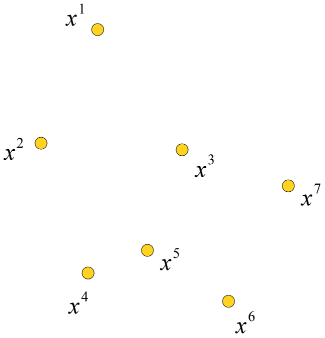
Revisão

▷ Definições importantes em Otimização



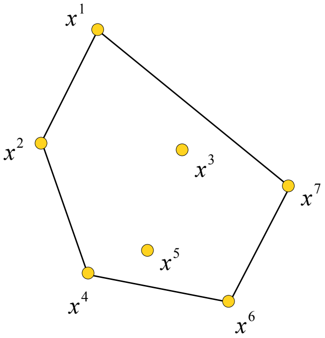
Revisão

▷ Envoltório convexo



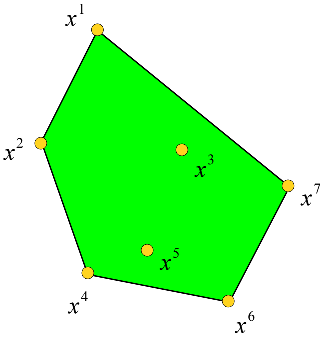
Revisão

▷ Envoltório convexo



Revisão

▷ Envoltório convexo



Teorema da Representação/Resolução

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio.

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$.

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

com $\sum_{q \in Q} \lambda_q = 1;$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

com $\sum_{q \in Q} \lambda_q = 1;\ \lambda_q \geq 0,$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1;\ \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0,$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1;\ \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \forall q \in Q, \forall r \in R.$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1;\ \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \forall q \in Q, \forall r \in R.$$

Em outras palavras, temos que:

$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r | \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0 \right\}.$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1;\ \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \forall q \in Q, \forall r \in R.$$

Em outras palavras, temos que:

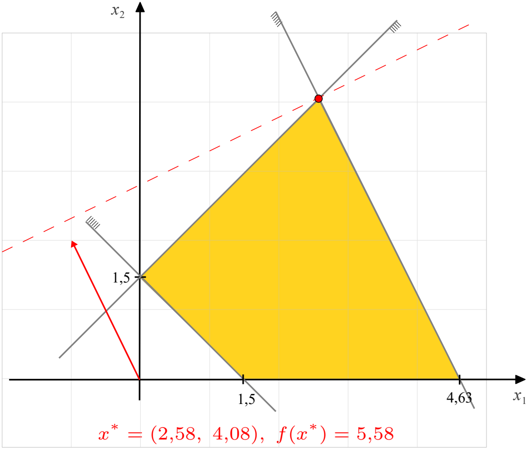
$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r \middle| \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0 \right\}.$$

Para demonstração, veja p. ex.: Bertsimas e Tsitsiklis (1997), p. 179; ou, Bazaraa, Sherali e Shetty (1993), p. 60.

Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

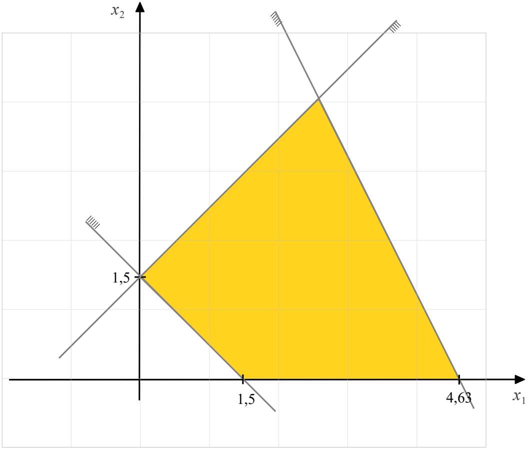
$$\begin{array}{ll} \text{max} & -1x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 18{,}5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

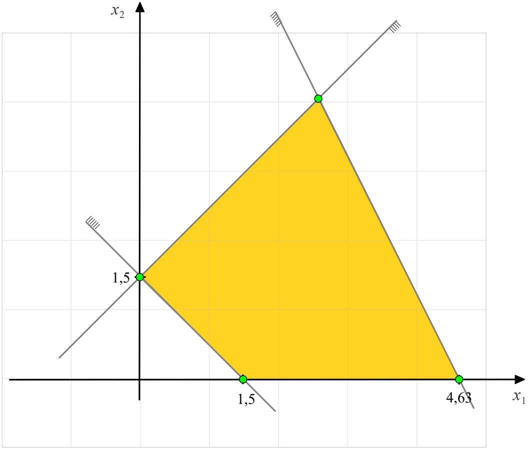
$$\mathcal{X} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18{,}5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

$$\mathcal{X} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 18{,}5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

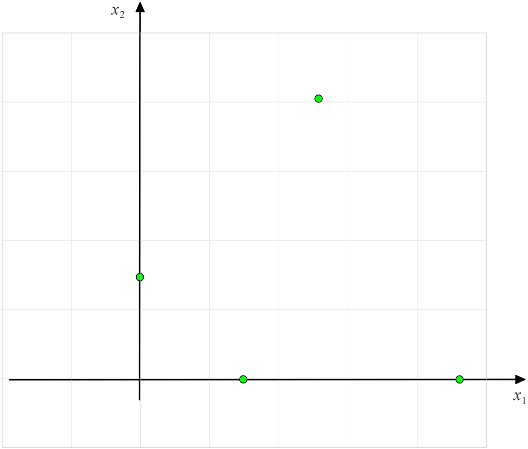


Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

Pontos extremos:

- $\bar{x}^1 = (0;\ 1{,}5)$;
- $\bar{x}^2 = (1{,}5;\ 0)$;
- $\bar{x}^3 = (4{,}63;\ 0)$;
- $\bar{x}^4 = (2{,}58;\ 4{,}08)$.



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

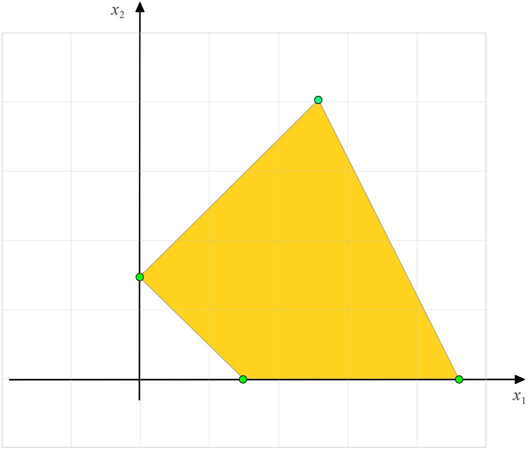
Combinação convexa:

$x = \lambda_1 \bar{x}^1 + \lambda_2 \bar{x}^2 + \lambda_3 \bar{x}^3 + \lambda_4 \bar{x}^4$

com $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$;

Sendo:

- $\bar{x}^1 = (0;\ 1{,}5)$;
- $\bar{x}^2 = (1{,}5;\ 0)$;
- $\bar{x}^3 = (4{,}63;\ 0)$;
- $\bar{x}^4 = (2{,}58;\ 4{,}08)$.



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

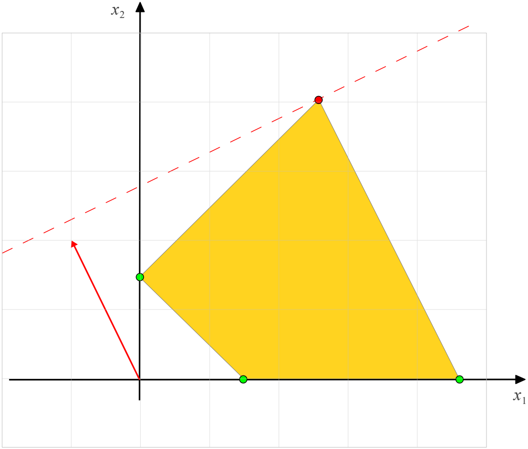
Combinação convexa:

$x = \lambda_1 \bar{x}^1 + \lambda_2 \bar{x}^2 + \lambda_3 \bar{x}^3 + \lambda_4 \bar{x}^4$

com $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$;

Sendo:

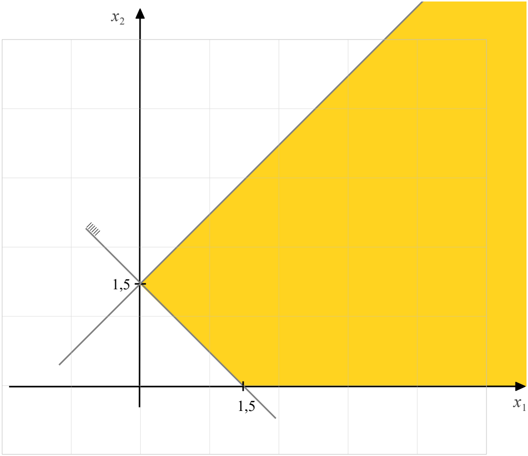
- $\bar{x}^1 = (0;\ 1{,}5)$;
- $\bar{x}^2 = (1{,}5;\ 0)$;
- $\bar{x}^3 = (4{,}63;\ 0)$;
- $\bar{x}^4 = (2{,}58;\ 4{,}08)$.



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

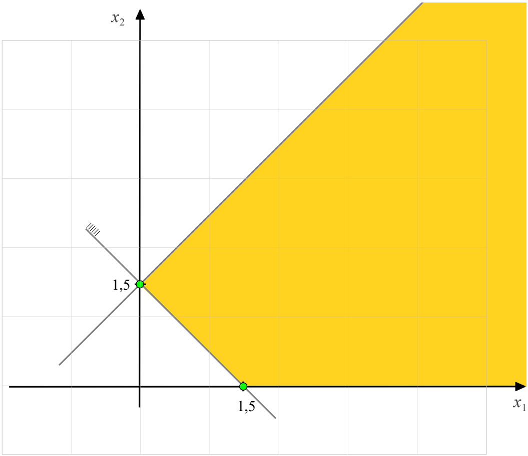
$$\mathcal{X} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

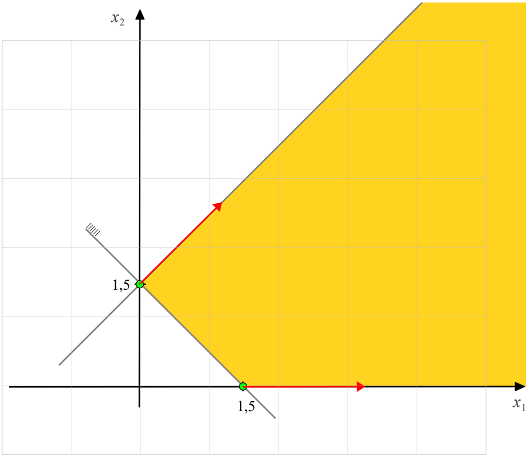
$$\mathcal{X} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

$$\mathcal{X} = \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{c} 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$



Teorema da Representação/Resolução

▷ Ilustração

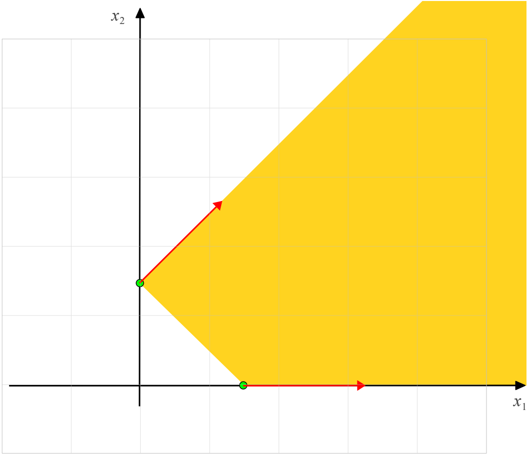
Combinação convexa e linear:

$x = \lambda_1 \bar{x}^1 + \lambda_2 \bar{x}^2 + \mu_5 \bar{x}^5 + \mu_6 \bar{x}^6$

com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1; \mu_5, \mu_6 \geq 0$

Sendo:

- $\bar{x}^1 = (0;\ 1{,}5)$;
- $\bar{x}^2 = (1{,}5;\ 0)$;
- $\bar{x}^5 = (1;\ 1)$;
- $\bar{x}^6 = (1;\ 0)$;



Teorema da Representação/Resolução

- O Teorema da Representação é fundamental nas técnicas de reformulação.

Teorema da Representação/Resolução

- O Teorema da Representação é fundamental nas técnicas de reformulação.
- Na relaxação Lagrangiana, permite o uso do método de planos de corte para a resolução do dual Lagrangiano;

Teorema da Representação/Resolução

- O Teorema da Representação é fundamental nas técnicas de reformulação.
- Na relaxação Lagrangiana, permite o uso do método de planos de corte para a resolução do dual Lagrangiano;
- Na decomposição de Dantzig-Wolfe é usado para substituir a variável $x \in \mathcal{X}$ pela combinação de pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}$:

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r, \quad \text{com} \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0.$$

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?