Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 11.2: Método de planos de corte em Relaxação Lagrangiana

Objetivos deste tópico

- Ver como linearizar o problema dual Lagrangiano usando o Teorema da Representação;
- Estudar o método de plano de cortes e ver como usá-lo para resolver o problma Dual Lagrangiano linearizado.

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Os métodos de plano de corte são baseados na representação do problema dual Lagrangiano como um problema de programação linear;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Os métodos de plano de corte são baseados na representação do problema dual Lagrangiano como um problema de programação linear;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\}$$

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Os métodos de plano de corte são baseados na representação do problema dual Lagrangiano como um problema de programação linear;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\}$$

- Para formulá-lo como um problema de programação linear, precisamos eliminar as minimizações internas;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Os métodos de plano de corte são baseados na representação do problema dual Lagrangiano como um problema de programação linear;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\}$$

- Para formulá-lo como um problema de programação linear, precisamos eliminar as minimizações internas;
- O primeiro passo é definir os conjuntos $\mathcal{X}^k = \{x^k \mid D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}$, que correspondem às regiões factíveis dos subproblemas;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Os métodos de plano de corte são baseados na representação do problema dual Lagrangiano como um problema de programação linear;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}$$

- Para formulá-lo como um problema de programação linear, precisamos eliminar as minimizações internas;
- O primeiro passo é definir os conjuntos $\mathcal{X}^k = \{x^k \mid D^k x^k = d^k, x^k \geq 0\}$, que correspondem às regiões factíveis dos subproblemas;
- Com isso, reescrevemos os subproblemas como:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k)x^k, \; k = 1, \ldots, K$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Para um dado $p \in \mathbb{R}^m$, temos que o k-ésimo subproblema pode ou ter solução ótima ou ser ilimitado (por que não pode ser infactível?);

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Para um dado $p \in \mathbb{R}^m$, temos que o k-ésimo subproblema pode ou ter solução ótima ou ser ilimitado (por que não pode ser infactível?);
- No primeiro caso, existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{X}^k$ tal que:

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Para um dado $p \in \mathbb{R}^m$, temos que o k-ésimo subproblema pode ou ter solução ótima ou ser ilimitado (por que não pode ser infactível?);
- No primeiro caso, existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{X}^k$ tal que:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Para um dado $p \in \mathbb{R}^m$, temos que o k-ésimo subproblema pode ou ter solução ótima ou ser ilimitado (por que não pode ser infactível?);
- No primeiro caso, existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{X}^k$ tal que:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k = (c^k - p^T A^k) \bar{x}_*^k$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Para um dado $p \in \mathbb{R}^m$, temos que o k-ésimo subproblema pode ou ter solução ótima ou ser ilimitado (por que não pode ser infactível?);
- No primeiro caso, existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{X}^k$ tal que:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k)x^k = (c^k - p^T A^k)\bar{x}_*^k = \min_{q \in Q^k} (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k$$

sendo Q^k o conjunto de índices de todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$;

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

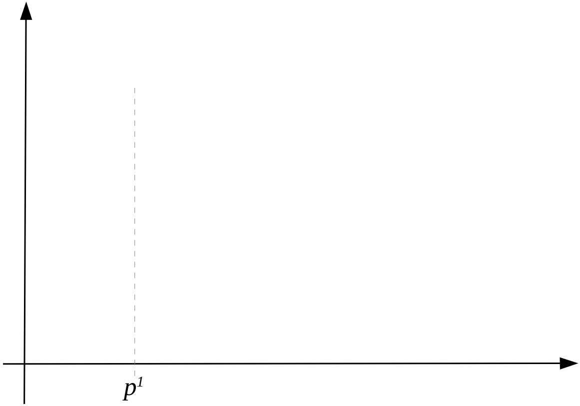
- Para um dado $p \in \mathbb{R}^m$, temos que o k-ésimo subproblema pode ou ter solução ótima ou ser ilimitado (por que não pode ser infactível?);
- No primeiro caso, existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{X}^k$ tal que:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k = (c^k - p^T A^k) \bar{x}_*^k = \min_{q \in Q^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k$$

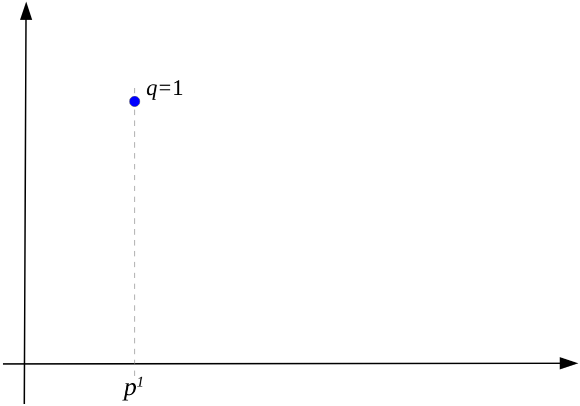
sendo Q^k o conjunto de índices de todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$;

- Note que o fato de um ponto extremo $\bar{x}_q^k$ ser ótimo depende da escolha do multiplicador p (cada p pode levar a um ótimo diferente);

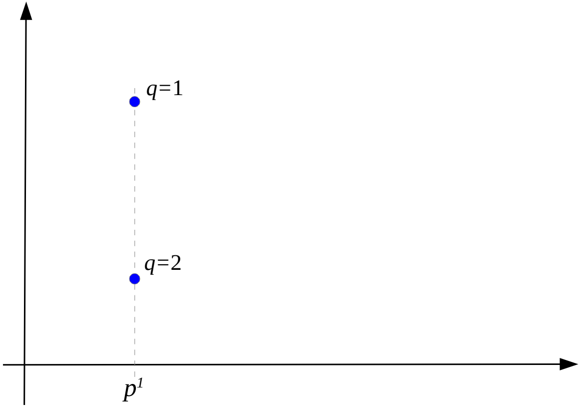
Dual Lagrangiano



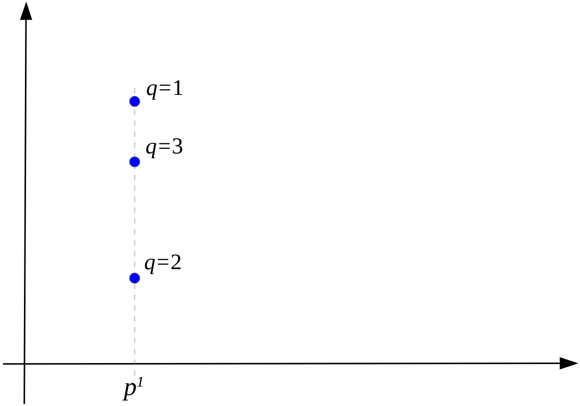
Dual Lagrangiano



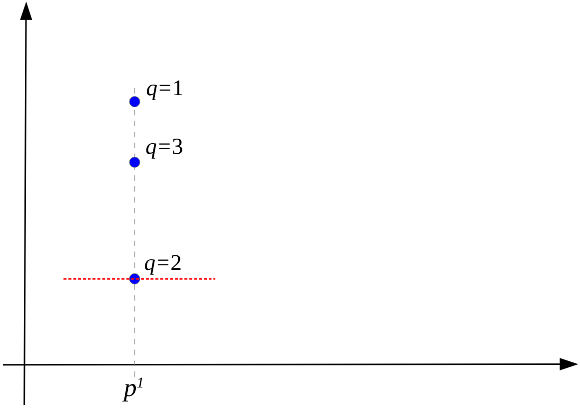
Dual Lagrangiano



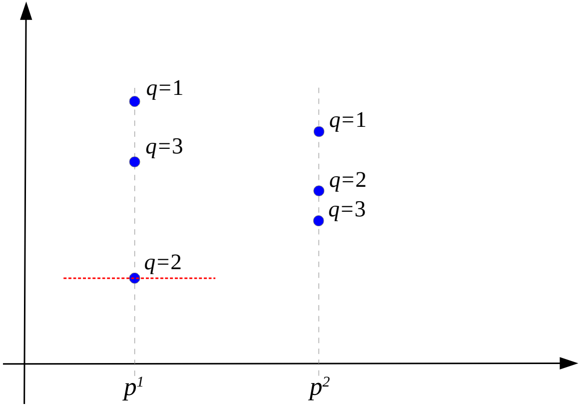
Dual Lagrangiano



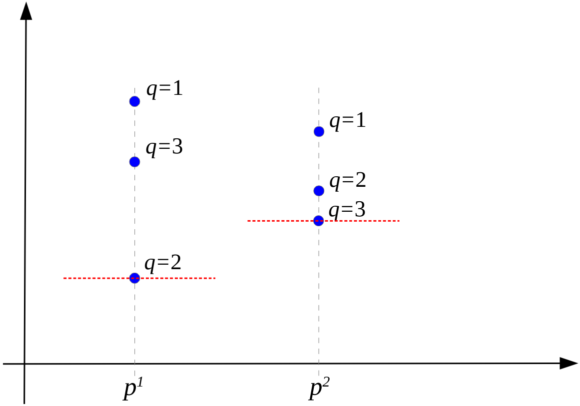
Dual Lagrangiano



Dual Lagrangiano



Dual Lagrangiano



Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Temos então que, para $k \in \{1, \dots, K\}$:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Temos então que, para $k \in \{1, \ldots, K\}$:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k$$

$$= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{q \in \mathcal{Q}^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Temos então que, para $k \in \{1, \ldots, K\}$:

$$\begin{aligned}
&\max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \\
&= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{q \in \mathcal{Q}^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k \\
&= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min\{(c^k - p^T A^k)\bar{x}_1^k, (c^k - p^T A^k)\bar{x}_2^k, \ldots, (c^k - p^T A^k)\bar{x}_{|\mathcal{Q}^k|}^k\}
\end{aligned}$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Temos então que, para $k \in \{1, \ldots, K\}$:

$$
\begin{aligned}
&\max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \\
&= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{q \in \mathcal{Q}^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k \\
&= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min\{(c^k - p^T A^k)\bar{x}_1^k, (c^k - p^T A^k)\bar{x}_2^k, \ldots, (c^k - p^T A^k)\bar{x}_{|\mathcal{Q}^k|}^k\} \\
&= \max_{\substack{p \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^K}} \{v^k \mid v^k \leq (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k,\ q \in \mathcal{Q}^k\}
\end{aligned}
$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Temos então que, para $k \in \{1, \ldots, K\}$:

$$\begin{aligned}
&\max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \\
&= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{q \in \mathcal{Q}^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k \\
&= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min\{(c^k - p^T A^k)\bar{x}_1^k, (c^k - p^T A^k)\bar{x}_2^k, \ldots, (c^k - p^T A^k)\bar{x}_{|\mathcal{Q}^k|}^k\} \\
&= \max_{\substack{p \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^K}} \{v^k \mid v^k \leq (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k, \ q \in \mathcal{Q}^k\} \qquad \text{(linear)}
\end{aligned}$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

Por exemplo, se todos os subproblems forem limitados:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \quad = \quad \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\}$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

Por exemplo, se todos os subproblems forem limitados:

$$
\begin{aligned}
\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \quad &= \quad \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\} \\
&= \quad \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \right\}
\end{aligned}
$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

Por exemplo, se todos os subproblems forem limitados:

$$
\begin{aligned}
\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\} \\
&= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \right\} \\
&= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{q \in \mathcal{Q}^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k \right\}
\end{aligned}
$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

Por exemplo, se todos os subproblems forem limitados:

$$
\begin{aligned}
\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \quad &= \quad \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\} \\
&= \quad \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \right\} \\
&= \quad \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{q \in \mathcal{Q}^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k \right\} \\
&= \quad \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min \{ (c^k - p^T A^k) \bar{x}_1^k, (c^k - p^T A^k) \bar{x}_2^k, \ldots \right. \\
&\qquad\qquad \left. \ldots, (c^k - p^T A^k) \bar{x}_{|\mathcal{Q}^k|}^k \} \right\}
\end{aligned}
$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

Por exemplo, se todos os subproblems forem limitados:

$$\begin{aligned}
\max_{p\in\mathbb{R}^m} g(p) \quad &= \quad \max_{p\in\mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k\geq 0} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\} \\
&= \quad \max_{p\in\mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k\in\mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \right\} \\
&= \quad \max_{p\in\mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{q\in\mathcal{Q}^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k \right\} \\
&= \quad \max_{p\in\mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min\{ (c^k - p^T A^k) \bar{x}_1^k, (c^k - p^T A^k) \bar{x}_2^k, \ldots \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. \ldots, (c^k - p^T A^k) \bar{x}_{|\mathcal{Q}^k|}^k \} \right\} \\
&= \quad \max_{\substack{p\in\mathbb{R}^m \\ v\in\mathbb{R}^K}} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \mid v^k \leq (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k,\ q \in \mathcal{Q}^k, k = 1, \ldots, K \right\}
\end{aligned}$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Logo, se todos os subproblemas forem limitados:

$$\max_{p} g(p) = \quad \max_{p,v} \quad p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k$$
$$\text{s.a} \quad v^k \leq (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k, \; k = 1, \ldots, K, \quad q \in Q^k,$$

sendo Q^k o conjunto de índices de todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$.

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Logo, se todos os subproblemas forem limitados:

$$\max_{p} g(p) = \max_{p,v} \quad p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k$$
$$\text{s.a} \quad v^k \leq (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k, \; k = 1, \ldots, K, \quad q \in Q^k,$$

sendo Q^k o conjunto de índices de todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$.

- Mas e se tivermos subproblemas ilimitados?

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Caso um subproblema k seja ilimitado, então existe um raio de descida:

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Caso um subproblema k seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \to -\infty.$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Caso um subproblema k seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \rightarrow -\infty.$$

- Isso é útil pra alguma coisa?

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Caso um subproblema k seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \to -\infty.$$

- Isso é útil pra alguma coisa?
- Como estamos interessados em limitantes, esse resultado é irrelevante e deve ser evitado, impondo-se

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Caso um subproblema k seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \to -\infty.$$

- Isso é útil pra alguma coisa?
- Como estamos interessados em limitantes, esse resultado é irrelevante e deve ser evitado, impondo-se

$$(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad \forall r \in R^k,$$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Caso um subproblema k seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \to -\infty.$$

- Isso é útil pra alguma coisa?
- Como estamos interessados em limitantes, esse resultado é irrelevante e deve ser evitado, impondo-se

$$(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad \forall r \in R^k,$$

sendo R^k o conjunto de índices de todos os raios extremos de $\mathcal{X}^k$.

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Caso um subproblema k seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \to -\infty.$$

- Isso é útil pra alguma coisa?
- Como estamos interessados em limitantes, esse resultado é irrelevante e deve ser evitado, impondo-se

$$(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad \forall r \in R^k,$$

sendo R^k o conjunto de índices de todos os raios extremos de $\mathcal{X}^k$.

- Assim, se o subproblema é ilimitado, temos que p é

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Caso um subproblema k seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \to -\infty.$$

- Isso é útil pra alguma coisa?
- Como estamos interessados em limitantes, esse resultado é irrelevante e deve ser evitado, impondo-se

$$(c^k - p^T A^k)\bar{x}^k_r \geq 0, \quad \forall r \in R^k,$$

sendo R^k o conjunto de índices de todos os raios extremos de $\mathcal{X}^k$.

- Assim, se o subproblema é ilimitado, temos que p é infactível!

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

▷ Observação

- Lembre que um raio é todo vetor $\bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$ tal que $x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$, para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

▷ Observação

- Lembre que um raio é todo vetor $\bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$ tal que $x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$, para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Nesse caso, um raio de descida é todo raio que satisfaça

$$(c^k - p^T A^k)(x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k) < (c^k - p^T A^k)x^k$$

para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

▷ Observação

- Lembre que um raio é todo vetor $\bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$ tal que $x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$, para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Nesse caso, um raio de descida é todo raio que satisfaça

$$(c^k - p^T A^k)(x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k) < (c^k - p^T A^k)x^k$$

  para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Note que isso é possível se, e somente se:

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

▷ Observação

- Lembre que um raio é todo vetor $\bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$ tal que $x^k + \varepsilon\bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$, para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Nesse caso, um raio de descida é todo raio que satisfaça

$$(c^k - p^T A^k)(x^k + \varepsilon\bar{x}_r^k) < (c^k - p^T A^k)x^k$$

  para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Note que isso é possível se, e somente se:
  $(c^k - p^T A^k)x^k + \varepsilon(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < (c^k - p^T A^k)x^k$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

▷ Observação

- Lembre que um raio é todo vetor $\bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$ tal que $x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$, para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Nesse caso, um raio de descida é todo raio que satisfaça

$$(c^k - p^T A^k)(x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k) < (c^k - p^T A^k)x^k$$

  para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Note que isso é possível se, e somente se:
  $(c^k - p^T A^k)x^k + \varepsilon(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < (c^k - p^T A^k)x^k$
  $\Leftrightarrow \varepsilon(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < 0$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

▷ Observação

- Lembre que um raio é todo vetor $\bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$ tal que $x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$, para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Nesse caso, um raio de descida é todo raio que satisfaça

$$(c^k - p^T A^k)(x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k) < (c^k - p^T A^k)x^k$$

  para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Note que isso é possível se, e somente se:
  $(c^k - p^T A^k)x^k + \varepsilon(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < (c^k - p^T A^k)x^k$
  $\Leftrightarrow \varepsilon(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < 0$
  $\Leftrightarrow (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < 0.$

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

▷ Observação

- Lembre que um raio é todo vetor $\bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$ tal que $x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k \in \mathcal{X}^k$, para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Nesse caso, um raio de descida é todo raio que satisfaça

$$(c^k - p^T A^k)(x^k + \varepsilon \bar{x}_r^k) < (c^k - p^T A^k)x^k$$

  para todo $x^k \in \mathcal{X}^k$ e todo $\varepsilon > 0$;
- Note que isso é possível se, e somente se:
  $(c^k - p^T A^k)x^k + \varepsilon(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < (c^k - p^T A^k)x^k$
  $\Leftrightarrow \varepsilon(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < 0$
  $\Leftrightarrow (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k < 0.$
- Portanto, $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0$ garante que a escolha de p não faça com que $\bar{x}_r^k$ seja um raio de descida no subproblema.

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Logo, o problema Dual Lagrangiano se torna:

$$
\begin{aligned}
\max_{p,v} \quad & p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \\
\text{s.a} \quad & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k,\ k = 1, \ldots, K, \quad q \in Q^k, \\
& (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0,\ k = 1, \ldots, K, \quad r \in R^k.
\end{aligned}
$$

sendo Q^k e R^k os conjuntos de índices de todos os pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}^k$, respectivamente.

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Logo, o problema Dual Lagrangiano se torna:

$$\begin{aligned} \max_{p,v} \quad & p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \\ \text{s.a} \quad & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \; k = 1, \ldots, K, \quad q \in Q^k, \\ & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \; k = 1, \ldots, K, \quad r \in R^k. \end{aligned}$$

sendo Q^k e R^k os conjuntos de índices de todos os pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}^k$, respectivamente.

- Dado o número imenso de pontos e raios extremos, precisamos recorrer ao *Método de Planos de Corte*;

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Logo, o problema Dual Lagrangiano se torna:

$$\begin{aligned} \max_{p,v} \quad & p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \\ \text{s.a} \quad & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \; k = 1, \dots, K, \quad q \in Q^k, \\ & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \; k = 1, \dots, K, \quad r \in R^k. \end{aligned}$$

  sendo Q^k e R^k os conjuntos de índices de todos os pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}^k$, respectivamente.

- Dado o número imenso de pontos e raios extremos, precisamos recorrer ao *Método de Planos de Corte*;
- Iniciamos com um subconjunto de restrições apenas e, iterativamente, geramos as demais.

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dados $\tilde{Q}^k \subset Q^k$ e $\tilde{R}^k \subset R^k$,

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dados $\tilde{Q}^k \subset Q^k$ e $\tilde{R}^k \subset R^k$, temos o Problema Mestre Relaxado (PMR):

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dados $\tilde{Q}^k \subset Q^k$ e $\tilde{R}^k \subset R^k$, temos o Problema Mestre Relaxado (PMR):

$$\begin{aligned} \max_{p,v} \quad & g(p) = p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \\ \text{s.a} \quad & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \quad k = 1, \ldots, K, \quad q \in \tilde{Q}^k, \end{aligned}$$

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dados $\tilde{Q}^k \subset Q^k$ e $\tilde{R}^k \subset R^k$, temos o Problema Mestre Relaxado (PMR):

$$\max_{p,v} \quad g(p) = p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k$$

$$\text{s.a} \quad (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \quad k = 1, \ldots, K, \quad q \in \tilde{Q}^k,$$

$$(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, K, \quad r \in \tilde{R}^k.$$

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dados $\tilde{Q}^k \subset Q^k$ e $\tilde{R}^k \subset R^k$, temos o Problema Mestre Relaxado (PMR):

$$\begin{array}{lll} \max\limits_{p,v} & g(p) = p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k & \\ \text{s.a} & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \quad k = 1, \ldots, K, & q \in \tilde{Q}^k, \\ & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, K, & r \in \tilde{R}^k. \end{array}$$

- Garantimos apenas que a solução ótima (p_*, v_*) do PMR satisfaz um subconjunto das restrições do problema Dual Lagrangiano;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dados $\tilde{Q}^k \subset Q^k$ e $\tilde{R}^k \subset R^k$, temos o Problema Mestre Relaxado (PMR):

$$
\begin{aligned}
\max_{p,v} \quad & g(p) = p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \\
\text{s.a} \quad & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \quad k = 1, \ldots, K, \quad q \in \tilde{Q}^k, \\
& (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, K, \quad r \in \tilde{R}^k.
\end{aligned}
$$

- Garantimos apenas que a solução ótima (p_*, v_*) do PMR satisfaz um subconjunto das restrições do problema Dual Lagrangiano;
- Como saber se ela satisfaz todas?

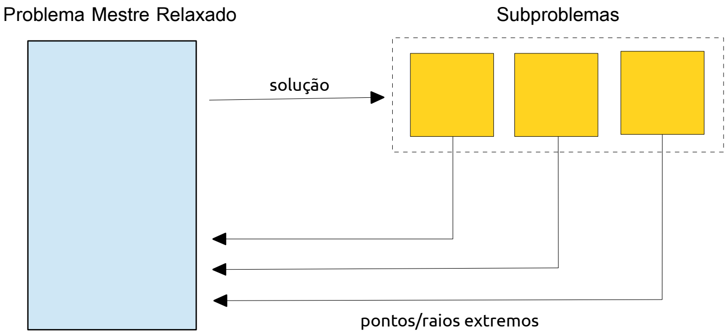
Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dados $\tilde{Q}^k \subset Q^k$ e $\tilde{R}^k \subset R^k$, temos o Problema Mestre Relaxado (PMR):

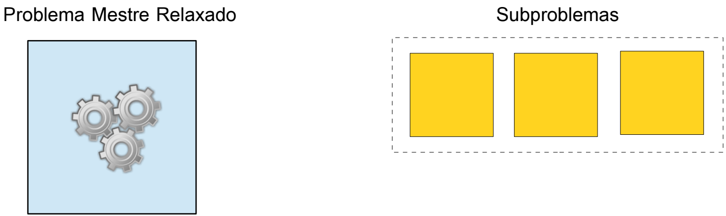
$$\begin{aligned} \max_{p,v} \quad & g(p) = p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \\ \text{s.a} \quad & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \quad k = 1, \ldots, K, \quad q \in \tilde{Q}^k, \\ & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, K, \quad r \in \tilde{R}^k. \end{aligned}$$

- Garantimos apenas que a solução ótima (p_*, v_*) do PMR satisfaz um subconjunto das restrições do problema Dual Lagrangiano;
- Como saber se ela satisfaz todas?
  R: Verificando se os subproblemas possuem pontos/raios extremos.

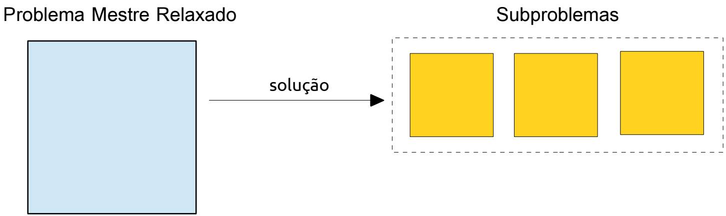
Método de planos de corte (geração de restrições)



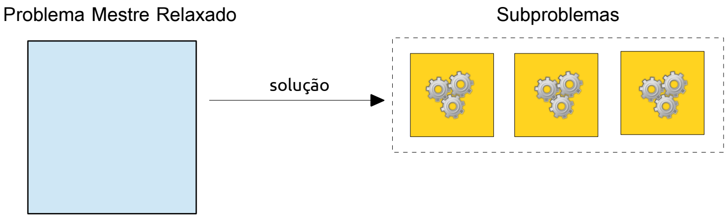
Método de planos de corte (geração de restrições)



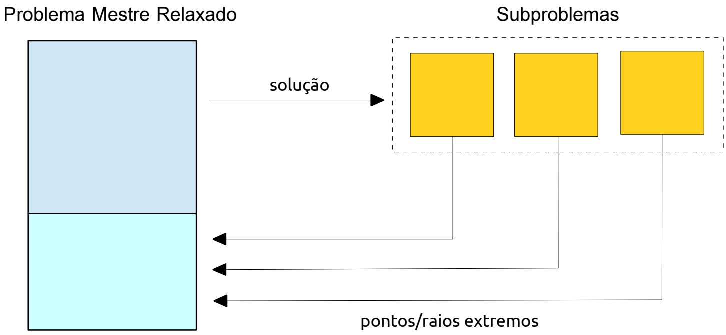
Método de planos de corte (geração de restrições)



Método de planos de corte (geração de restrições)



Método de planos de corte (geração de restrições)



Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:
  - O subproblema é <u>ilimitado</u>, com raio extremo $\bar{x}_r^k$.

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:
    - O subproblema é <u>ilimitado</u>, com raio extremo $\bar{x}_r^k$. Então r é adicionado ao conjunto $\tilde{R}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0$ para o PMR;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:
  - O subproblema é ilimitado, com raio extremo $\bar{x}_r^k$. Então r é adicionado ao conjunto $\tilde{R}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0$ para o PMR;
    (obs.: Um raio no subproblema significa que a p_* é infactível.

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:
  - O subproblema é ilimitado, com raio extremo $\bar{x}_r^k$. Então r é adicionado ao conjunto $\tilde{R}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0$ para o PMR;
    (obs.: Um raio no subproblema significa que a p_* é infactível. Assim, a restrição gerada é conhecida como corte de factibilidade)

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:
  - O subproblema é <u>ilimitado</u>, com raio extremo $\bar{x}_r^k$. Então r é adicionado ao conjunto $\tilde{R}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0$ para o PMR;
    (obs.: Um raio no subproblema significa que a p_* é infactível. Assim, a restrição gerada é conhecida como <u>corte de factibilidade</u>)
  - O subproblema possui um ponto extremo <u>ótimo</u> $\bar{x}_q^k$.

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:
  - O subproblema é ilimitado, com raio extremo $\bar{x}_r^k$. Então r é adicionado ao conjunto $\tilde{R}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0$ para o PMR;
    (obs.: Um raio no subproblema significa que a p_* é infactível. Assim, a restrição gerada é conhecida como corte de factibilidade)
  - O subproblema possui um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q^k$. Então, caso $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k < v_*^k$, adicionamos q ao conjunto $\tilde{Q}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k$ para o PMR;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:
  - O subproblema é ilimitado, com raio extremo $\bar{x}_r^k$. Então r é adicionado ao conjunto $\tilde{R}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0$ para o PMR;
    (obs.: Um raio no subproblema significa que a p_* é infactível. Assim, a restrição gerada é conhecida como corte de factibilidade)
  - O subproblema possui um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q^k$. Então, caso $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k < v_*^k$, adicionamos q ao conjunto $\tilde{Q}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k$ para o PMR;
    (obs.: Um ponto extremo no subproblema significa que p_* é factível. Porém, o limitante v_*^k está estimado "errado".

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Dada uma solução ótima (p_*, v_*) do PMR, após resolvermos o k-ésimo subproblema temos um dos dois casos:
  - O subproblema é <u>ilimitado</u>, com raio extremo $\bar{x}_r^k$. Então r é adicionado ao conjunto $\tilde{R}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0$ para o PMR;
    (obs.: Um raio no subproblema significa que a p_* é infactível. Assim, a restrição gerada é conhecida como <u>corte de factibilidade</u>)
  - O subproblema possui um ponto extremo <u>ótimo</u> $\bar{x}_q^k$. Então, caso $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k < v_*^k$, adicionamos q ao conjunto $\tilde{Q}^k$ atual, o que gera uma nova restrição $(c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k$ para o PMR;
    (obs.: Um ponto extremo no subproblema significa que p_* é factível. Porém, o limitante v_*^k está estimado "errado". Assim, a restrição gerada é conhecida como <u>corte de otimalidade</u>)

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q^k$

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui um ponto extremo <u>ótimo</u> $\bar{x}_q^k$ tal que $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v_*^k$;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q^k$ tal que $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v_*^k$;
- Inicialização:

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q^k$ tal que $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v_*^k$;
- Inicialização:
  - Podemos iniciar com um chute inicial p^0 que é enviado para os subproblemas e, assim, as primeiras restrições são geradas;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui um ponto extremo <u>ótimo</u> $\bar{x}_q^k$ tal que $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v_*^k$;
- Inicialização:
  - Podemos iniciar com um chute inicial p^0 que é enviado para os subproblemas e, assim, as primeiras restrições são geradas;
  - Outra forma é iniciar com um conjunto pré-definido de pontos e raios extremos que definem o problema mestre relaxado inicial;

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q^k$ tal que $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v_*^k$;
- Inicialização:
  - Podemos iniciar com um chute inicial p^0 que é enviado para os subproblemas e, assim, as primeiras restrições são geradas;
  - Outra forma é iniciar com um conjunto pré-definido de pontos e raios extremos que definem o problema mestre relaxado inicial;
- Limites artificiais:

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui um ponto extremo <u>ótimo</u> $\bar{x}_q^k$ tal que $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v_*^k$;
- Inicialização:
  - Podemos iniciar com um chute inicial p^0 que é enviado para os subproblemas e, assim, as primeiras restrições são geradas;
  - Outra forma é iniciar com um conjunto pré-definido de pontos e raios extremos que definem o problema mestre relaxado inicial;
- Limites artificiais:
  - Como o PMR não possui todas as restrições, é possível que se torne ilimitado, principalmente nas primeiras iterações.

Método de planos de corte (geração de restrições)

- Critério de parada:
  - Para **todo** $k = 1, \ldots, K$, o k-ésimo subproblema possui um ponto extremo <u>ótimo</u> $\bar{x}_q^k$ tal que $(c^k - p_*^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v_*^k$;
- Inicialização:
  - Podemos iniciar com um chute inicial p^0 que é enviado para os subproblemas e, assim, as primeiras restrições são geradas;
  - Outra forma é iniciar com um conjunto pré-definido de pontos e raios extremos que definem o problema mestre relaxado inicial;
- Limites artificiais:
  - Como o PMR não possui todas as restrições, é possível que se torne ilimitado, principalmente nas primeiras iterações. Assim, é comum adicionar limites artificiais para as variáveis p e v.

Método de planos de corte

▷ Exercício

Resolva o problema a seguir usando Relaxação Lagrangiana e o método de planos de corte, considerando que as três primeiras restrições são de acoplamento:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& 1 \leq x_1 \leq 3 \\
& 1 \leq x_2 \leq 3
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício

Aplicando Relaxação Lagrangiana...

Método de planos de corte

▷ Exercício

Aplicando Relaxação Lagrangiana...

$$\begin{array}{ll} \text{min} & x_1 - 2x_2 \\ & +p_1(3 - 2x_1 - 2x_2) \\ & +p_2(3 + 2x_1 - 2x_2) \\ & +p_3(10 - 2x_1 - x_2) \\ \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 \\ & 1 \leq x_2 \leq 3 \end{array}$$

Método de planos de corte

▷ Exercício

Aplicando Relaxação Lagrangiana...

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & x_1 - 2x_2 \\
& +p_1(3 - 2x_1 - 2x_2) \\
& +p_2(3 + 2x_1 - 2x_2) \\
& +p_3(10 - 2x_1 - x_2) \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 \\
& 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

para um dado vetor p tal que $p_1 \geq 0$, $p_2, p_3 \leq 0$.

Método de planos de corte

▷ Exercício

$$\max_{\substack{p_1 \geq 0 \\ p_2, p_3 \leq 0}}$$

Método de planos de corte

▷ Exercício

$$\max_{\substack{p_1 \geq 0 \\ p_2, p_3 \leq 0}} \Big[3p_1 + 3p_2 + 10p_3 +$$

Método de planos de corte

▷ Exercício

$$\max_{\substack{p_1 \geq 0 \\ p_2, p_3 \leq 0}} \Big[3p_1 + 3p_2 + 10p_3 +$$

$$\begin{array}{rl} +\text{min} & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)x_1 \\ \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 \end{array}$$

Método de planos de corte

▷ Exercício

$$\max_{\substack{p_1 \geq 0 \\ p_2, p_3 \leq 0}} \Big[3p_1 + 3p_2 + 10p_3 +$$

$$+\min \quad (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)x_1 \qquad + \min \quad (-2 - 2p_1 - 2p_2 - p_3)x_2 \Big]$$

$$\text{s.a} \quad 1 \leq x_1 \leq 3 \qquad\qquad \text{s.a} \quad 1 \leq x_2 \leq 3$$

Método de planos de corte

▷ Exercício

$$\max_{\substack{p_1 \geq 0 \\ p_2, p_3 \leq 0}} \Big[3p_1 + 3p_2 + 10p_3 +$$

$$+\begin{array}{ll} \text{min} & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)x_1 \\ \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 \end{array} \quad + \begin{array}{ll} \text{min} & (-2 - 2p_1 - 2p_2 - p_3)x_2 \\ \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 \end{array} \Big]$$

Os subproblemas são limitados e, assim, temos o Problema Mestre:

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{p,v} & 3p_1 + 3p_2 + 10p_3 + v_1 + v_2 \\ \text{s.a} & v^1 \leq (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)\bar{x}^1_q, \quad q \in Q^1, \\ & v^2 \leq (-2 - 2p_1 - 2p_2 - p_3)\bar{x}^2_q, \quad q \in Q^2, \\ & p_1 \geq 0, \; p_2, p_3 \leq 0, \end{array}$$

sendo Q^1 e Q^2 os conjuntos de índices de pontos extremos de $\mathcal{X}^1$ e $\mathcal{X}^2$.

Formulação do Dual Lagrangiano por programação linear

- Logo, se todos os subproblems forem limitados:

$$\max_{p} g(p) = \max_{p,v} \quad p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k$$
$$\text{s.a} \quad v^k \leq (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k, \; k = 1, \ldots, K, \quad q \in Q^k,$$

sendo Q^k o conjunto de índices de todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$.

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

Problema mestre relaxado inicial

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PMR}^0) \quad \max \quad & 3p_1 + 3p_2 + 10p_3 + v_1 + v_2 \\
& 0 \leq p_1 \leq 10000 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& -10000 \leq v_1 \leq 10000 \\
& -10000 \leq v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

Problema mestre relaxado inicial

$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}^0) \quad \max \quad & 3p_1 + 3p_2 + 10p_3 + v_1 + v_2 \\
& 0 \leq p_1 \leq 10000 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& -10000 \leq v_1 \leq 10000 \\
& -10000 \leq v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p^* = (10^4, 0, 0); \quad v^* = (10^4, 10^4), \quad g^* = 50000$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{rl}
(\mathsf{SP}_1^0)\ \min & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{rccrc}
(\mathsf{SP}_1^0)\ \min & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow & \min & (1 - 2(10^4) + 2(0) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$\begin{aligned} (\mathsf{SP}_1^0)\ \min \quad & (1-2p_1^*+2p_2^*-2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \min \quad & (1-2(10^4)+2(0)-2(0))x_1 \\ \text{s.a} \quad & 1 \le x_1 \le 3 & \text{s.a} \quad & 1 \le x_1 \le 3 \end{aligned}$$

- Por inspeção, temos a solução ótima

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$\begin{array}{lll} (\text{SP}_1^0)\ \min & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \min \quad (1 - 2(10^4) + 2(0) - 2(0))x_1 \\ \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & \quad\ \ \text{s.a} \quad\quad 1 \leq x_1 \leq 3 \end{array}$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_1 = 3$ com valor $\bar{f}_1 = -59997$;

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$(\text{SP}_1^0) \ \min \quad (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 \qquad \Rightarrow \min \quad (1 - 2(10^4) + 2(0) - 2(0))x_1$$
$$\text{s.a} \quad 1 \leq x_1 \leq 3 \qquad\qquad \text{s.a} \quad 1 \leq x_1 \leq 3$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_1 = 3$ com valor $\bar{f}_1 = -59997$;
- Dado que $\bar{f}_1 < v_1^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$(1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)\bar{x}_1 \geq v_1$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{llll}
(\mathsf{SP}_1^0)\ \min & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \min & (1 - 2(10^4) + 2(0) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_1 = 3$ com valor $\bar{f}_1 = -59997$;
- Dado que $\bar{f}_1 < v_1^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$
\begin{aligned}
& (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)\bar{x}_1 \geq v_1 \\
\Rightarrow \quad & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)3 \geq v_1
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{llll}
(\text{SP}_1^0) \ \min & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \min & (1 - 2(10^4) + 2(0) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_1 = 3$ com valor $\bar{f}_1 = -59997$;
- Dado que $\bar{f}_1 < v_1^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$
\begin{aligned}
& (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)\bar{x}_1 \geq v_1 \\
\Rightarrow \quad & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)3 \geq v_1 \\
\Rightarrow \quad & 3 - 6p_1 + 6p_2 - 6p_3 \geq v_1
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{llll}
(\mathsf{SP}_1^0)\ \min & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \min & (1 - 2(10^4) + 2(0) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_1 = 3$ com valor $\bar{f}_1 = -59997$;
- Dado que $\bar{f}_1 < v_1^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$
\begin{array}{ll}
 & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)\bar{x}_1 \geq v_1 \\
\Rightarrow & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)3 \geq v_1 \\
\Rightarrow & 3 - 6p_1 + 6p_2 - 6p_3 \geq v_1 \\
\Rightarrow & v_1 + 6p_1 - 6p_2 + 6p_3 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^0)\ \min \quad & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 \\
\text{s.a} \quad & 1 \leq x_2 \leq 3
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{rcl}
(\mathrm{SP}_2^0)\ \min & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 & \Rightarrow \min \quad (-2 - 2(10^4) - 2(0) - 0)x_2 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 & \text{s.a} \quad 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathrm{SP}_2^0) \ \text{min} & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 & \Rightarrow & \text{min} & (-2 - 2(10^4) - 2(0) - 0)x_2 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 & & \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos a solução ótima

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathsf{SP}_2^0)\ \text{min} & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 & \Rightarrow \text{min} & (-2 - 2(10^4) - 2(0) - 0)x_2 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -60006$;

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$(\text{SP}_2^0)\ \min\ (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 \quad \Rightarrow \min\ (-2 - 2(10^4) - 2(0) - 0)x_2$$
$$\text{s.a}\quad 1 \leq x_2 \leq 3 \qquad\qquad \text{s.a}\quad 1 \leq x_2 \leq 3$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -60006$;
- Dado que $\bar{f}_2 < v_2^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$(-2 - 2p_1 - 2p_2 - p_3)\bar{x}_2 \geq v_2$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathrm{SP}_2^0)\ \min & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 & \Rightarrow \min & (-2 - 2(10^4) - 2(0) - 0)x_2 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -60006$;
- Dado que $\bar{f}_2 < v_2^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$
\begin{array}{rl}
 & (-2 - 2p_1 - 2p_2 - p_3)\bar{x}_2 \geq v_2 \\
\Rightarrow & (-2 - 2p_1 - 2p_2 - p_3)3 \geq v_2
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{array}{llcll}
(\text{SP}_2^0)\ \min & (-2-2p_1^*-2p_2^*-p_3^*)x_2 & \Rightarrow & \min & (-2-2(10^4)-2(0)-0)x_2 \\
\text{s.a} & 1 \le x_2 \le 3 & & \text{s.a} & 1 \le x_2 \le 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -60006$;
- Dado que $\bar{f}_2 < v_2^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$
\begin{aligned}
& (-2-2p_1-2p_2-p_3)\bar{x}_2 \ge v_2 \\
\Rightarrow\quad & (-2-2p_1-2p_2-p_3)3 \ge v_2 \\
\Rightarrow\quad & -6-6p_1-6p_2-3p_3 \ge v_2
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$\begin{array}{llcll} (\mathrm{SP}_2^0)\ \min & (-2-2p_1^*-2p_2^*-p_3^*)x_2 & \Rightarrow & \min & (-2-2(10^4)-2(0)-0)x_2 \\ \text{s.a} & 1 \le x_2 \le 3 & & \text{s.a} & 1 \le x_2 \le 3 \end{array}$$

- Por inspeção, temos a solução ótima $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -60006$;
- Dado que $\bar{f}_2 < v_2^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$\begin{aligned} & (-2-2p_1-2p_2-p_3)\bar{x}_2 \ge v_2 \\ \Rightarrow\ & (-2-2p_1-2p_2-p_3)3 \ge v_2 \\ \Rightarrow\ & -6-6p_1-6p_2-3p_3 \ge v_2 \\ \Rightarrow\ & v_2+6p_1+6p_2+3p_3 \le -6 \end{aligned}$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PMR}^1) \quad \max \quad & 3p_1 + 3p_2 + 10p_3 + v_1 + v_2 \\
& v_1 + 6p_1 - 6p_2 + 6p_3 \leq 3 \\
& v_2 + 6p_1 + 6p_2 + 3p_3 \leq -6 \\
& 0 \leq p_1 \leq 10^4 \\
& -10^4 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10^4 \leq p_3 \leq 0 \\
& -10^4 \leq v_1 \leq 10^4 \\
& -10^4 \leq v_2 \leq 10^4
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p^* = (0,0,0); \quad v^* = (3,-6), \quad g^* = -3$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$
\begin{array}{rl}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \min & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \text{min} & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \text{min} & (1 - 2(0) + 2(0) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$\begin{array}{llcll} (\text{SP}_1^1) \ \text{min} & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \text{min} & (1 - 2(0) + 2(0) - 2(0))x_1 \\ \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 \end{array}$$

- Por inspeção, temos um novo ponto extremo $\bar{x}_1 = 1$, com valor $\bar{f}_1 = 1$;

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \min & (1-2p_1^*+2p_2^*-2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \min & (1-2(0)+2(0)-2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \le x_1 \le 3 & \text{s.a} & 1 \le x_1 \le 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos um novo <u>ponto extremo</u> $\bar{x}_1 = 1$, com valor $\bar{f}_1 = 1$;
- Dado que $\bar{f}_1 < v_1^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$(1-2p_1+2p_2-2p_3)\bar{x}_1 \ge v_1$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \text{min} & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow & \text{min} & (1 - 2(0) + 2(0) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos um novo ponto extremo $\bar{x}_1 = 1$, com valor $\bar{f}_1 = 1$;
- Dado que $\bar{f}_1 < v_1^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$
\begin{array}{rl}
 & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)\bar{x}_1 \geq v_1 \\
\Rightarrow & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)1 \geq v_1
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$
\begin{array}{llcll}
(\text{SP}_1^1) \ \text{min} & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \text{min} & (1 - 2(0) + 2(0) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos um novo ponto extremo $\bar{x}_1 = 1$, com valor $\bar{f}_1 = 1$;
- Dado que $\bar{f}_1 < v_1^*$, devemos inserir um corte de otimalidade:

$$
\begin{aligned}
& (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)\bar{x}_1 \geq v_1 \\
\Rightarrow \quad & (1 - 2p_1 + 2p_2 - 2p_3)1 \geq v_1 \\
\Rightarrow \quad & v_1 + 2p_1 - 2p_2 + 2p_3 \leq 1
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$
\begin{array}{lll}
(\mathsf{SP}_2^1) & \min & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 \\
& \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$\begin{array}{llcll} (\text{SP}_2^1) & \min & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 & \Rightarrow \min & (-2 - 2(0) - 2(0) - (0))x_2 \\ & \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 & \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 \end{array}$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathsf{SP}_2^1) \ \text{min} & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 & \Rightarrow & \text{min} & (-2 - 2(0) - 2(0) - (0))x_2 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 & & \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos o ponto extremo $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -6$;

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 1

$$(\text{SP}_2^1)\ \min \ (-2-2p_1^*-2p_2^*-p_3^*)x_2 \quad \Rightarrow \min \ (-2-2(0)-2(0)-(0))x_2$$
$$\text{s.a} \quad 1 \leq x_2 \leq 3 \qquad\qquad \text{s.a} \quad 1 \leq x_2 \leq 3$$

- Por inspeção, temos o ponto extremo $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -6$;
- Dado que $\bar{f}_2 = v_2^*$, nenhum corte será gerado deste subproblema!

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PMR}^2) \quad \max \quad & 3p_1 + 3p_2 + 10p_3 + v_1 + v_2 \\
& v_1 + 6p_1 - 6p_2 + 6p_3 \leq 3 \\
& v_2 + 6p_1 + 6p_2 + 3p_3 \leq -6 \\
& v_1 + 2p_1 - 2p_2 + 2p_3 \leq 1 \\
& 0 \leq p_1 \leq 10000 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& -10000 \leq v_1 \leq 10000 \\
& -10000 \leq v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p^* = (0, -0.5, 0); \quad v^* = (0, -3), \quad g^* = -4.5$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{array}{lll}
(\mathsf{SP}_1^2) & \min & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 \\
 & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{array}{rlrl}
(\mathsf{SP}_1^2)\ \text{min} & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow \text{min} & (1 - 2(0) + 2(-0.5) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \le x_1 \le 3 & \text{s.a} & 1 \le x_1 \le 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$(\mathsf{SP}_1^2)\ \text{min} \quad (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 \quad \Rightarrow \text{min} \quad (1 - 2(0) + 2(-0.5) - 2(0))x_1$$
$$\text{s.a} \quad 1 \leq x_1 \leq 3 \qquad\qquad \text{s.a} \quad 1 \leq x_1 \leq 3$$

- Qualquer ponto factível é ótimo, com valor $\bar{f}_1 = 0$;

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathsf{SP}_1^2) \ \text{min} & (1 - 2p_1^* + 2p_2^* - 2p_3^*)x_1 & \Rightarrow & \text{min} & (1 - 2(0) + 2(-0.5) - 2(0))x_1 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3 & & \text{s.a} & 1 \leq x_1 \leq 3
\end{array}
$$

- Qualquer ponto factível é ótimo, com valor $\bar{f}_1 = 0$;
- Dado que $\bar{f}_2 = v_2^*$, nenhum corte será gerado deste subproblema!

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^2)\ \min\quad & (-2 - 2p_1^* - 2p_2^* - p_3^*)x_2 \\
\text{s.a}\quad & 1 \leq x_2 \leq 3
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{array}{llcll}
(\mathsf{SP}_2^2)\ \text{min} & (-2-2p_1^*-2p_2^*-p_3^*)x_2 & \Rightarrow & \text{min} & (-2-2(0)-2(-0.5)-(0))x_2 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 & & \text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{array}{lll}
(\text{SP}_2^2)\ \text{min} & (-2-2p_1^*-2p_2^*-p_3^*)x_2 & \Rightarrow \text{min} \quad (-2-2(0)-2(-0.5)-(0))x_2 \\
\text{s.a} & 1 \leq x_2 \leq 3 & \qquad \text{s.a} \qquad 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos o ponto extremo $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -3$;

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{array}{rlcrl}
(\mathrm{SP}_2^2)\ \text{min} & (-2-2p_1^*-2p_2^*-p_3^*)x_2 & \Rightarrow & \text{min} & (-2-2(0)-2(-0.5)-(0))x_2 \\
\text{s.a} & 1 \le x_2 \le 3 & & \text{s.a} & 1 \le x_2 \le 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos o ponto extremo $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -3$;
- Dado que $\bar{f}_2 = v_2^*$, nenhum corte será gerado deste subproblema!

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

$$
\begin{array}{lll}
(\mathsf{SP}_2^2)\ \min & (-2-2p_1^*-2p_2^*-p_3^*)x_2 & \Rightarrow \min \quad (-2-2(0)-2(-0.5)-(0))x_2 \\
\text{s.a} & 1 \le x_2 \le 3 & \qquad\ \text{s.a} \qquad\qquad 1 \le x_2 \le 3
\end{array}
$$

- Por inspeção, temos o ponto extremo $\bar{x}_2 = 3$ com valor $\bar{f}_2 = -3$;
- Dado que $\bar{f}_2 = v_2^*$, nenhum corte será gerado deste subproblema!
- FIM!

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 2

- Logo, $p^* = (0, -0.5, 0)$; $v^* = (0, -3)$ é uma solução ótima do problema dual Lagrangiano e, portanto, $g^* = -4.5$ é o valor ótimo do problema!

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL

Considere o PDL a seguir. Reformule-o usando Relaxação Lagrangiana e então obtenha uma solução ótima usando o método de planos de corte.

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\
& x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \; I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL

Após aplicar relaxação Lagrangiana:

$$\max_{p_1, p_2, p_3 \leq 0} 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 +$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL

Após aplicar relaxação Lagrangiana:

$$\max_{p_1, p_2, p_3 \leq 0} 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 +$$

$$
\begin{aligned}
+ \text{ min} \quad & (1.0 - 0.1p_1)x_{11} + (1.5 - 0.1p_2)x_{12} \\
& +(2.0 - 0.1p_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL

Após aplicar relaxação Lagrangiana:

$$\max_{p_1, p_2, p_3 \leq 0} \; 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 +$$

$$
\begin{array}{llll}
+\ \text{min} & (1.0 - 0.1p_1)x_{11} + (1.5 - 0.1p_2)x_{12} & +\ \text{min} & (0.5 - 0.08p_1)x_{21} + (0.5 - 0.08p_2)x_{22} \\
 & +(2.0 - 0.1p_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} & & +(0.9 - 0.08p_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 & \text{s.a} & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
 & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 & & x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
 & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 & & x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
 & I_{10} = 0 & & I_{20} = 0 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 & & x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
 & I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0 & & I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{array}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

Problema mestre relaxado inicial

$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}^0) \quad \max \quad & 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 + v_1 + v_2 \\
& -10000 \leq p_1 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& v_1 \leq 10000 \\
& v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p^* = (0, 0, 0); \quad v^* = (10^4, 10^4)$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^0)\ \min \quad & (1.0 - \cancel{0.1p_1^*})x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^0)\ \text{min}\quad & (1.0-\cancel{0.1p_1^*})x_{11}+(1.5-\cancel{0.1p_2^*})x_{12}\\
& +(2.0-\cancel{0.1p_3^*})x_{13}+0.5I_{11}+0.25I_{12}\\
\text{s.a}\quad & x_{11}+I_{10}-I_{11}=900\\
& x_{12}+I_{11}-I_{12}=1800\\
& x_{13}+I_{12}-I_{13}=1800\\
& I_{10}=0\\
& x_{11},x_{12},x_{13}\geq 0\\
& I_{11},I_{12},I_{13}\geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11}\\ \bar{x}_{12}\\ \bar{x}_{13}\\ \bar{I}_{11}\\ \bar{I}_{12}\\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500\\ 0\\ 0\\ 3600\\ 1800\\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 6750
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^0)\ \min \quad & (1.0 - \cancel{0.1p_1^*})x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 6750 < v_1^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_1^0)\ \min\quad & (1.0 - \cancel{0.1p_1^*})x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1)\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 6750 < v_1^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_1^0)\ \min\quad & (1.0 - \cancel{0.1p_1^*})x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1$$

$$c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} - p^T A^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 6750 < v_1^*$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^1 =$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^1 = (1.0, 1.5, 2.0, 0.5, 0.25, 0)$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^1 = (1.0, 1.5, 2.0, 0.5, 0.25, 0)$$

$$c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} =$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^1 = (1.0, 1.5, 2.0, 0.5, 0.25, 0)$$

$$c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = 6750$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A^1 =$$

$$c^1 = (1.0, 1.5, 2.0, 0.5, 0.25, 0)$$

$$c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = 6750$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c^1 = (1.0, 1.5, 2.0, 0.5, 0.25, 0)$$

$$c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = 6750$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c^1 = (1.0, 1.5, 2.0, 0.5, 0.25, 0)$$

$$A^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} = 6750$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_1^0)\ \min\quad & (1.0 - \cancel{0.1p_1^*})x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 6750 < v_1^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} - p^T A^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_1^0)\ \min\quad & (1.0 - \cancel{0.1p_1^*})x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 6750 < v_1^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} - p^T A^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
6750 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 450 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{array}{lrl}
(\mathsf{SP}_1^0) \text{ min} & & (1.0 - \cancel{0.1p_1^*})x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& & +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} & & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& & I_{10} = 0 \\
& & x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& & I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 6750 < v_1^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
c^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} - p^T A^1 \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
6750 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 450 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
\Rightarrow v1 + 450p_1 \leq 6750
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^0)\ \min \quad & (0.5 - \cancel{0.08p_1^*})x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^0)\ \min\quad & (0.5 - \cancel{0.08p_1^*})x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1100
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^0)\ \min \quad & (0.5 - \cancel{0.08p_1^*})x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1100 < v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^0)\ \min\quad & (0.5 - \cancel{0.08p_1^*})x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$(c^2 - p^T A^2) \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1100 < v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^0)\ \min\quad & (0.5 - \cancel{0.08p_1^*})x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$(c^2 - p^T A^2)\begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2$$

$$c^2\begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} - p^T A^2 \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1100 < v_2^*$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$(\text{SP}_2^0) \min \quad (0.5 - \cancel{0.08p_1^*})x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} + (0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22}$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} x_{21} + I_{20} - I_{21} &= 400 \\ x_{22} + I_{21} - I_{22} &= 600 \\ x_{23} + I_{22} - I_{23} &= 800 \\ I_{20} &= 0 \\ x_{21}, x_{22}, x_{23} &\geq 0 \\ I_{21}, I_{22}, I_{23} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1100 < v_2^*$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$(c^2 - p^T A^2) \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2$$

$$c^2 \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} - p^T A^2 \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2$$

$$1100 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 32 \\ 112 \\ 0 \end{bmatrix} \geq v_2$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 0

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^0)\ \min \quad & (0.5 - \cancel{0.08p_1^*})x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1100 < v_2^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^2 - p^T A^2) \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2
$$

$$
c^2 \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} - p^T A^2 \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2
$$

$$
1100 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 32 \\ 112 \\ 0 \end{bmatrix} \geq v_2
$$

$$
\Rightarrow v2 + 32p_1 + 112p_2 \leq 1100
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

Problema mestre relaxado

$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}^1) \quad \max \quad & 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 + v_1 + v_2 \\
& v1 + 450p_1 \leq 6750 \\
& v2 + 32p_1 + 112p_2 \leq 1100 \\
& -10000 \leq p_1 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& v_1 \leq 10000 \\
& v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

Problema mestre relaxado

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PMR}^1) \quad \max \quad & 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 + v_1 + v_2 \\
& v1 + 450p_1 \leq 6750 \\
& v2 + 32p_1 + 112p_2 \leq 1100 \\
& -10000 \leq p_1 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& v_1 \leq 10000 \\
& v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p^* = (-7.2222, 0, 0); \quad v^* = (10^4, 1331.11); \quad g^* = 9597.78$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \min\quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \min \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ 3600 \\ 0 \\ 0 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7399.98
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \text{min} \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ 3600 \\ 0 \\ 0 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7399.98 < v_1^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_1^1)\ \min\quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1)\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ 3600 \\ 0 \\ 0 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7399.98 < v_1^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \min \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ 3600 \\ 0 \\ 0 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7399.98 < v_1^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
6750 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 90 \\ 360 \\ 0 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^1)\ \text{min} \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 - \cancel{0.1p_2^*})x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 900 \\ 3600 \\ 0 \\ 0 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7399.98 < v_1^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
6750 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 90 \\ 360 \\ 0 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
\Rightarrow v1 + 90p_1 + 360p_2 \leq 6750
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^1)\ \min \quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^1)\ \min\quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1332
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^1)\ \min\quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1332 > v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_2^1)\ \min \quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

v_2^* está bem estimado!

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1332 > v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 1

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_2^1)\ \min\quad & (0.5 + 0.58)x_{21} + (0.5 - \cancel{0.08p_2^*})x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

v_2^* está bem estimado!

Nenhum corte será inserido.

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1332 > v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

Problema mestre relaxado

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PMR}^2) \quad \max \quad & 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 + v_1 + v_2 \\
& v1 + 450p_1 \leq 6750 \\
& v2 + 32p_1 + 112p_2 \leq 1100 \\
& v1 + 90p_1 + 360p_2 \leq 6750 \\
& -10000 \leq p_1 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& v_1 \leq 10000 \\
& v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

Problema mestre relaxado

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PMR}^2)\quad \max\quad & 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 + v_1 + v_2 \\
& v1 + 450p_1 \leq 6750 \\
& v2 + 32p_1 + 112p_2 \leq 1100 \\
& v1 + 90p_1 + 360p_2 \leq 6750 \\
& -10000 \leq p_1 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& v_1 \leq 10000 \\
& v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p^* = (-7.2222, -7.2222, 0);\quad v^* = (10^4, 2140);\quad g^* = 8095.56$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^2)\ \min \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 + 0.7222)x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^2)\ \text{min} \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 + 0.7222)x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2700 \\ 0 \\ 1800 \\ 1800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 9149.94
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^2)\ \min \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 + 0.7222)x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2700 \\ 0 \\ 1800 \\ 1800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 9149.94 < v_1^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_1^2)\ \min \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 + 0.7222)x_{12} \\
& + (2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2700 \\ 0 \\ 1800 \\ 1800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 9149.94 < v_1^*$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^2)\ \min\quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 + 0.7222)x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2700 \\ 0 \\ 1800 \\ 1800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 9149.94 < v_1^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
7200 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 270 \\ 0 \\ 180 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^2) \ \min \quad & (1.0 + 0.7222)x_{11} + (1.5 + 0.7222)x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2700 \\ 0 \\ 1800 \\ 1800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 9149.94 < v_1^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^1 - p^T A^1) \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{I}^1 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
7200 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 270 \\ 0 \\ 180 \end{bmatrix} \geq v_1
$$

$$
\Rightarrow v1 + 270p_1 + 180p_3 \leq 7200
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^2)\ \min \quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_2^2)\ \min \quad & (0.5 + 0.58)x_{21} + (0.5 + 0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1800
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^2)\ \min \quad & (0.5 + 0.58)x_{21} + (0.5 + 0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1800 < v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^2)\ \min\quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^2 - p^T A^2) \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1800 < v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$(\text{SP}_2^2)\ \min \quad (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} + (0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22}$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} x_{21} + I_{20} - I_{21} &= 400 \\ x_{22} + I_{21} - I_{22} &= 600 \\ x_{23} + I_{22} - I_{23} &= 800 \\ I_{20} &= 0 \\ x_{21}, x_{22}, x_{23} &\geq 0 \\ I_{21}, I_{22}, I_{23} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1800 < v_2^*$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$(c^2 - p^T A^2) \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2$$

$$1220 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 32 \\ 48 \\ 64 \end{bmatrix} \geq v_2$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^2)\ \min \quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1800 < v_2^*
$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$
(c^2 - p^T A^2) \begin{bmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{I}^2 \end{bmatrix} \geq v_2
$$

$$
1220 - (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} 32 \\ 48 \\ 64 \end{bmatrix} \geq v_2
$$

$$
\Rightarrow v2 + 32p_1 + 48p_2 + 64p_3 \leq 1220
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

Problema mestre relaxado

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PMR}^3) \quad \max \quad & 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 + v_1 + v_2 \\
& v1 + 450p_1 \leq 6750 \\
& v2 + 32p_1 + 112p_2 \leq 1100 \\
& v1 + 90p_1 + 360p_2 \leq 6750 \\
& v1 + 270p_1 + 180p_3 \leq 7200 \\
& v2 + 32p_1 + 48p_2 + 64p_3 \leq 1220 \\
& -10000 \leq p_1 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& v_1 \leq 10000 \\
& v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

Problema mestre relaxado

$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}^3) \quad \max \quad & 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 + v_1 + v_2 \\
& v1 + 450p_1 \leq 6750 \\
& v2 + 32p_1 + 112p_2 \leq 1100 \\
& v1 + 90p_1 + 360p_2 \leq 6750 \\
& v1 + 270p_1 + 180p_3 \leq 7200 \\
& v2 + 32p_1 + 48p_2 + 64p_3 \leq 1220 \\
& -10000 \leq p_1 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_2 \leq 0 \\
& -10000 \leq p_3 \leq 0 \\
& v_1 \leq 10000 \\
& v_2 \leq 10000
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow p^* = (-1.875, -1.875, 0); \quad v^* = (7593.75, 1370); \quad g^* = 7913.75$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^3)\ \min\quad & (1.0 + 0.1875)x_{11} + (1.5 + 0.1875)x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_1^3)\ \text{min} \quad & (1.0 + 0.1875)x_{11} + (1.5 + 0.1875)x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7593.75
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{SP}_1^3) & \min & (1.0 + 0.1875)x_{11} + (1.5 + 0.1875)x_{12} \\
& & +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
& \text{s.a} & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& & x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& & x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& & I_{10} = 0 \\
& & x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& & I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7593.75 = v_1^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_1^3)\ \min\quad & (1.0 + 0.1875)x_{11} + (1.5 + 0.1875)x_{12} \\
& +(2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a}\quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

O limitante está bem estimado!

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7593.75 = v_1^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}_1^3)\ \min \quad & (1.0 + 0.1875)x_{11} + (1.5 + 0.1875)x_{12} \\
& + (2.0 - \cancel{0.1p_3^*})x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

O limitante está bem estimado!

Nenhum corte a inserir.

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_1 = 7593.75 = v_1^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^3)\ \min \quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^3)\ \min \quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1370
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^3)\ \min \quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1370 = v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^3)\ \min \quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

O limitante está bem estimado!

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1370 = v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{SP}_2^3)\ \min\quad & (0.5+0.58)x_{21} + (0.5+0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

O limitante está bem estimado!

Nenhum corte a inserir.

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1370 = v_2^*
$$

Método de planos de corte

▷ Exercício PDL: Iteração 3

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{SP}_2^3)\ \min\quad & (0.5 + 0.58)x_{21} + (0.5 + 0.58)x_{22} \\
& +(0.9 - \cancel{0.08p_3^*})x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a}\quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

O limitante está bem estimado!

Nenhum corte a inserir.

Solução ótima encontrada!

$$
\begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f}_2 = 1370 = v_2^*
$$

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?