Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

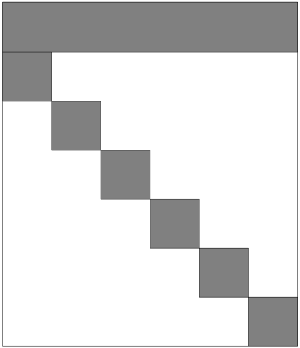
PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

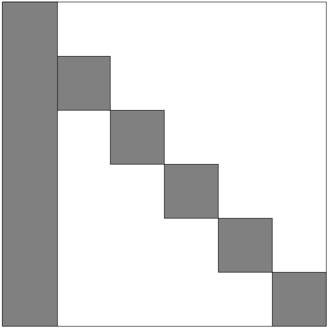
Tópico 11.3: Método Subgradiente em Relaxação Lagrangiana

Objetivos deste tópico

- Estudar o método subgradiente e como aplicá-lo na resolução do problema dual Lagrangiano.

Problemas de grande-porte





Problemas de grande-porte

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& Dx = d, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, & \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, & \text{(restrições de acoplamento)} \\
& Dx = d, & \text{(estrutura em blocos)} \\
& x \geq 0, &
\end{aligned}
$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
D = \begin{bmatrix}
D^1 & & & \\
& D^2 & & \\
& & \ddots & \\
& & & D^K
\end{bmatrix}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} x = d, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$
\begin{array}{lllll}
\min & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K & & & \\
\text{s.a} & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K & & & = b \\
& D^1x^1 & & & = d^1 \\
& & D^2x^2 & & = d^2 \\
& & & \ddots & \vdots \\
& & & D^Kx^K & = d^K \\
& & x \geq 0 & &
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

$$
\begin{array}{rl}
g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K + \; p^T(b - A^1x^1 - A^2x^2 - \ldots - A^Kx^K) \\
\text{s.a} & \begin{array}{llll} D^1x^1 & & & = d^1 \\ & D^2x^2 & & = d^2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & D^Kx^K & = d^K \end{array}
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

$$
\begin{array}{rllllll}
g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K + p^T(b - A^1x^1 - A^2x^2 - \ldots - A^Kx^K) \\
\text{s.a} & D^1x^1 & & & & = d^1 \\
& & D^2x^2 & & & = d^2 \\
& & & \ddots & & \vdots \\
& & & & D^Kx^K & = d^K
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rllllll}
g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & p^Tb + (c^1 - p^TA^1)x^1 + (c^2 - p^TA^2)x^2 + \ldots + (c^K - p^TA^K)x^K \\
\text{s.a} & D^1x^1 & & & & = d^1 \\
& & D^2x^2 & & & = d^2 \\
& & & \ddots & & \vdots \\
& & & & D^Kx^K & = d^K
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana

▷ Caso geral

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\ &\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\ &= p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \end{aligned}$$

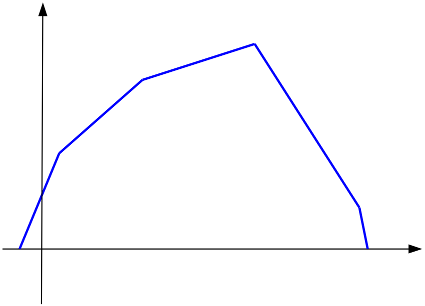
- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}$$

Método Subgradiente

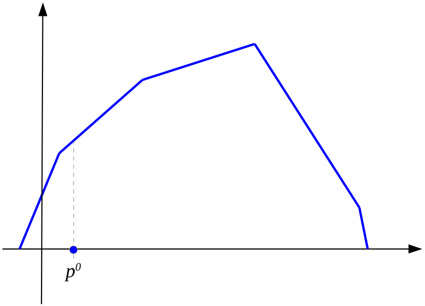
Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;



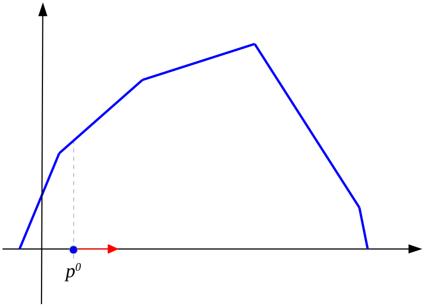
Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;
- Podemos então usar um método de busca iterativo.



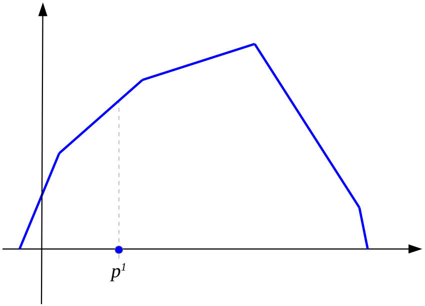
Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;
- Podemos então usar um método de busca iterativo.



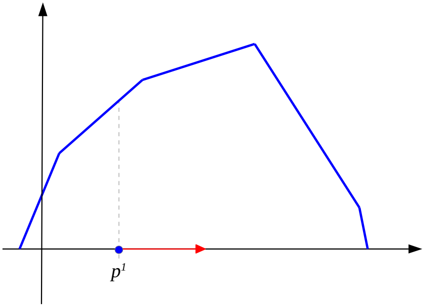
Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;
- Podemos então usar um método de busca iterativo.



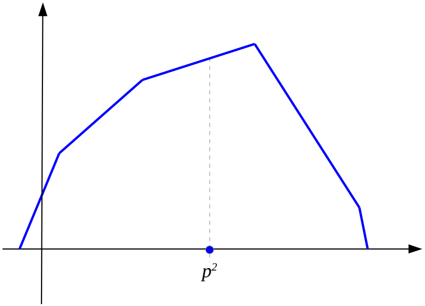
Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;
- Podemos então usar um método de busca iterativo.



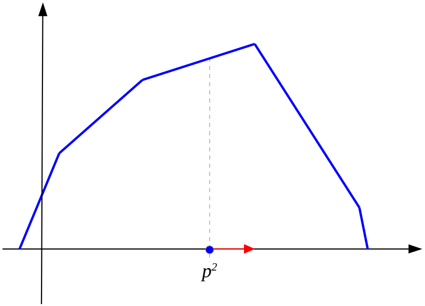
Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;
- Podemos então usar um método de busca iterativo.



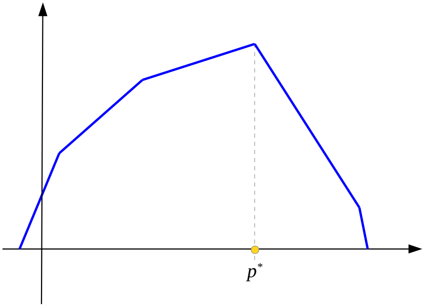
Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;
- Podemos então usar um método de busca iterativo.



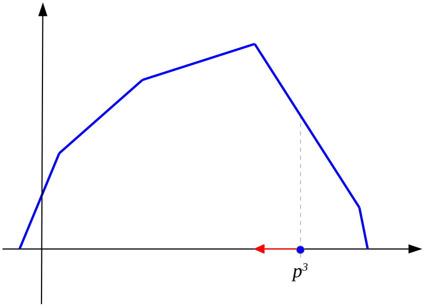
Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;
- Podemos então usar um método de busca iterativo.



Método Subgradiente

- O problema dual Lagrangiano pode ser representado por uma função côncava linear por partes;
- Podemos então usar um método de busca iterativo.



Método Subgradiente

- A otimização de funções contínuas e diferenciáveis pode ser feita usando-se o *método gradiente*;

Método Subgradiente

- A otimização de funções contínuas e diferenciáveis pode ser feita usando-se o *método gradiente*;
- Dado uma função diferenciável g e um dado ponto p em seu domínio, o gradiente $\nabla g(p)$ aponta para a direção de crescimento da função a partir do ponto p;

Método Subgradiente

- A otimização de funções contínuas e diferenciáveis pode ser feita usando-se o *método gradiente*;
- Dado uma função diferenciável g e um dado ponto p em seu domínio, o gradiente $\nabla g(p)$ aponta para a direção de crescimento da função a partir do ponto p;
- Dado um ponto inicial p^0, o método gradiente calcula uma sequência de iterações
$$p^{i+1} = p^i + \alpha_i \nabla g(p^i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Método Subgradiente

- A otimização de funções contínuas e diferenciáveis pode ser feita usando-se o *método gradiente*;
- Dado uma função diferenciável g e um dado ponto p em seu domínio, o gradiente $\nabla g(p)$ aponta para a direção de crescimento da função a partir do ponto p;
- Dado um ponto inicial p^0, o método gradiente calcula uma sequência de iterações

$$p^{i+1} = p^i + \alpha_i \nabla g(p^i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

até que $\nabla g(p^i) = 0$ para algum i;

Método Subgradiente

- A otimização de funções contínuas e diferenciáveis pode ser feita usando-se o *método gradiente*;
- Dado uma função diferenciável g e um dado ponto p em seu domínio, o gradiente $\nabla g(p)$ aponta para a direção de crescimento da função a partir do ponto p;
- Dado um ponto inicial p^0, o método gradiente calcula uma sequência de iterações
$$p^{i+1} = p^i + \alpha_i \nabla g(p^i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$
até que $\nabla g(p^i) = 0$ para algum i;
- Quando a função não é diferenciável, não é possível calcular o gradiente em todos os seus pontos e, assim, recorremos a um subgradiente.

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz
$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$
- O método subgradiente é comumente usado para encontrar o ótimo de funções côncavas lineares por partes;

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz

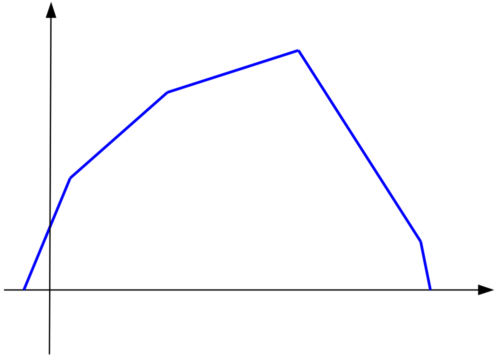
$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

- O método subgradiente é comumente usado para encontrar o ótimo de funções côncavas lineares por partes;
- Em geral, resolve problemas do tipo:

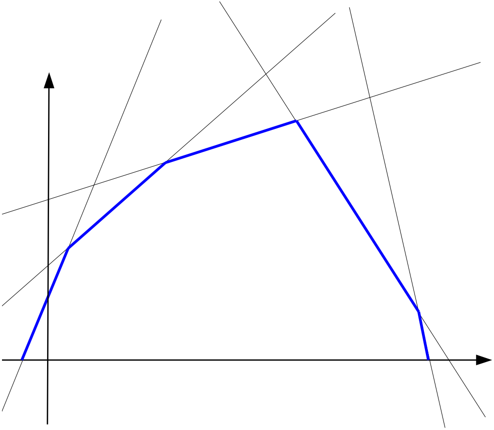
$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ g(p) = \min_{\ell=1,\ldots,L} \{ h^\ell p - \gamma^\ell \} \right\}.$$

sendo $h^\ell p = \gamma^\ell$, $\ell = 1, \ldots, L$, um conjunto de L hiperplanos conhecidos.

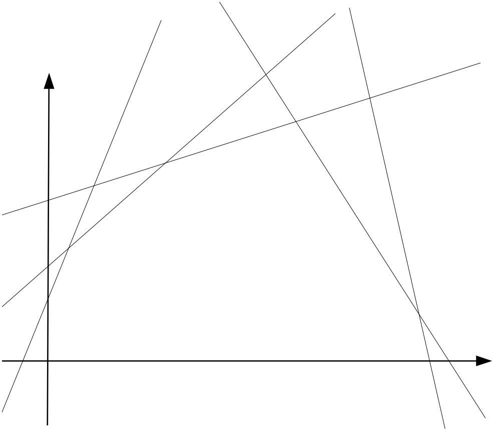
Método Subgradiente



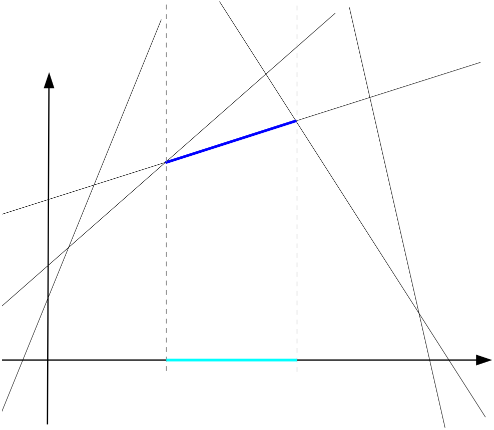
Método Subgradiente



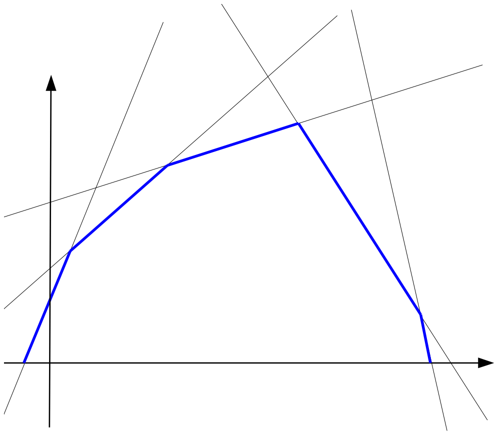
Método Subgradiente



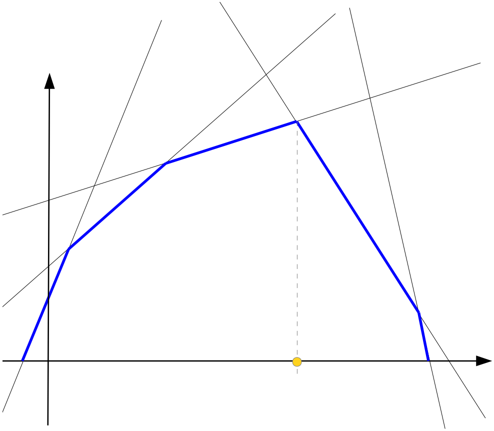
Método Subgradiente



Método Subgradiente



Método Subgradiente



Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

- Observe que para todo $\bar{\ell}$ tal que $h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}} = \min_{\ell=1,\ldots,L} \{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\}$, temos que $h^{\bar{\ell}}$ é um subgradiente.

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

- Observe que para todo $\bar{\ell}$ tal que $h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}} = \min_{\ell=1,\ldots,L} \{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\}$, temos que $h^{\bar{\ell}}$ é um subgradiente. De fato:

$$g(p) - g(\bar{p}) \quad =$$

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz
$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$
- Observe que para todo $\bar{\ell}$ tal que $h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}} = \min_{\ell=1,\ldots,L}\{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\}$, temos que $h^{\bar{\ell}}$ é um subgradiente. De fato:

$$g(p) - g(\bar{p}) \quad = \quad \min_{\ell=1,\ldots,L}\{h^{\ell}p - \gamma^{\ell}\} - \min_{\ell=1,\ldots,L}\{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\}$$

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

- Observe que para todo $\bar{\ell}$ tal que $h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}} = \min_{\ell=1,\ldots,L} \{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\}$, temos que $h^{\bar{\ell}}$ é um subgradiente. De fato:

$$\begin{aligned} g(p) - g(\bar{p}) &= \min_{\ell=1,\ldots,L} \{h^{\ell}p - \gamma^{\ell}\} - \min_{\ell=1,\ldots,L} \{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\} \\ &= \min_{\ell=1,\ldots,L} \{h^{\ell}p - \gamma^{\ell}\} - (h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}}) \end{aligned}$$

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz
$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$
- Observe que para todo $\bar{\ell}$ tal que $h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}} = \min_{\ell=1,\ldots,L}\{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\}$, temos que $h^{\bar{\ell}}$ é um subgradiente. De fato:

$$\begin{aligned}
g(p) - g(\bar{p}) &= \min_{\ell=1,\ldots,L}\{h^{\ell}p - \gamma^{\ell}\} - \min_{\ell=1,\ldots,L}\{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\} \\
&= \min_{\ell=1,\ldots,L}\{h^{\ell}p - \gamma^{\ell}\} - (h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}}) \\
&\leq (h^{\bar{\ell}}p - \gamma^{\bar{\ell}}) - (h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}})
\end{aligned}$$

Método Subgradiente

- Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função côncava;
- Dado um ponto $\bar{p}$, um **subgradiente** de g em $\bar{p}$ é qualquer vetor $s \in \mathbb{R}^m$ que satisfaz
$$g(p) - g(\bar{p}) \leq s^T(p - \bar{p}), \quad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$
- Observe que para todo $\bar{\ell}$ tal que $h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}} = \min_{\ell=1,\dots,L}\{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\}$, temos que $h^{\bar{\ell}}$ é um subgradiente. De fato:

$$\begin{aligned}
g(p) - g(\bar{p}) &= \min_{\ell=1,\dots,L}\{h^{\ell}p - \gamma^{\ell}\} - \min_{\ell=1,\dots,L}\{h^{\ell}\bar{p} - \gamma^{\ell}\} \\
&= \min_{\ell=1,\dots,L}\{h^{\ell}p - \gamma^{\ell}\} - (h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}}) \\
&\leq (h^{\bar{\ell}}p - \gamma^{\bar{\ell}}) - (h^{\bar{\ell}}\bar{p} - \gamma^{\bar{\ell}}) \\
&= h^{\bar{\ell}}(p - \bar{p}).
\end{aligned}$$

Método Subgradiente

Em relaxação Lagrangiana, queremos resolver:

$$
\begin{array}{rllllll}
\max\limits_{p \in \mathcal{R}^m} g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & c^1 x^1 + \ldots + c^K x^K + \; p^T(b - A^1 x^1 - \ldots - A^K x^K) & & & & \\
\text{s.a} & D^1 x^1 & & & & = d^1 \\
 & & D^2 x^2 & & & = d^2 \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & D^K x^K & = d^K
\end{array}
$$

Método Subgradiente

Em relaxação Lagrangiana, queremos resolver:

$$
\begin{array}{rllr}
\max\limits_{p \in \mathcal{R}^m} g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & c^1x^1 + \ldots + c^Kx^K + \; p^T(b - A^1x^1 - \ldots - A^Kx^K) & & \\
\text{s.a} & D^1x^1 & & = d^1 \\
& \quad D^2x^2 & & = d^2 \\
& \qquad \ddots & & \vdots \\
& \qquad\quad D^Kx^K & & = d^K
\end{array}
$$

Usando a notação $\mathcal{X}^k = \{x^k \mid D^kx^k = d^k, 0 \leq x^k \leq u^k\}$,

Método Subgradiente

Em relaxação Lagrangiana, queremos resolver:

$$
\begin{array}{rlllll}
\max\limits_{p \in \mathcal{R}^m} g(p) = \min\limits_{x \geq 0} & c^1x^1 + \ldots + c^Kx^K + \ p^T(b - A^1x^1 - \ldots - A^Kx^K) & & & & \\
\text{s.a} & D^1x^1 & & & & = d^1 \\
 & & D^2x^2 & & & = d^2 \\
 & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & D^Kx^K & = d^K
\end{array}
$$

Usando a notação $\mathcal{X}^k = \{x^k \mid D^kx^k = d^k, 0 \leq x^k \leq u^k\}$, reescrevemos:

$$
\max_{p \in \mathcal{R}^m} \left\{ g(p) \quad = \min_{\substack{x^k \in \mathcal{X}^k \\ \forall k = 1, \ldots, K}} c^1x^1 + \ldots + c^Kx^K + \ p^T(b - A^1x^1 - \ldots - A^Kx^K) \right\}
$$

Método Subgradiente

Substituindo em x^k todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$, os quais são denotados por $\bar{x}_q^k, q \in Q^k$, obtemos:

$$\max_{p \in \mathcal{R}^m} \left\{ g(p) \quad = \min_{\substack{q \in Q^k \\ \forall k=1,\ldots,K}} c^1 \bar{x}_q^1 + \ldots + c^K \bar{x}_q^K + \; p^T (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K) \right\}$$

Método Subgradiente

Substituindo em x^k todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$, os quais são denotados por $\bar{x}_q^k, q \in Q^k$, obtemos:

$$\max_{p \in \mathcal{R}^m} \left\{ g(p) \quad = \min_{\substack{q \in Q^k \\ \forall k=1,\ldots,K}} \; c^1 \bar{x}_q^1 + \ldots + c^K \bar{x}_q^K + \; p^T (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K) \right\}$$

Assim, temos uma função côncava linear por partes, do tipo:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ g(p) = \min_{\ell=1,\ldots,L} \{ h^\ell p - \gamma^\ell \} \right\},$$

Método Subgradiente

Substituindo em x^k todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$, os quais são denotados por $\bar{x}_q^k, q \in Q^k$, obtemos:

$$\max_{p \in \mathcal{R}^m} \left\{ g(p) \quad = \min_{\substack{q \in Q^k \\ \forall k=1,\ldots,K}} \; c^1 \bar{x}_q^1 + \ldots + c^K \bar{x}_q^K + \; p^T (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K) \right\}$$

Assim, temos uma função côncava linear por partes, do tipo:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ g(p) = \min_{\ell=1,\ldots,L} \{ h^\ell p - \gamma^\ell \} \right\},$$

com $h^\ell = (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K)$ e $\gamma^\ell = -c^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - c^K \bar{x}_q^K$.

Método Subgradiente

Substituindo em x^k todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$, os quais são denotados por $\bar{x}^k_q, q \in Q^k$, obtemos:

$$\max_{p \in \mathcal{R}^m} \left\{ g(p) \quad = \min_{\substack{q \in Q^k \\ \forall k=1,\ldots,K}} \; c^1 \bar{x}^1_q + \ldots + c^K \bar{x}^K_q + \; p^T (b - A^1 \bar{x}^1_q - \ldots - A^K \bar{x}^K_q) \right\}$$

Assim, temos uma função côncava linear por partes, do tipo:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ g(p) = \min_{\ell=1,\ldots,L} \{ h^\ell p - \gamma^\ell \} \right\},$$

com $h^\ell = (b - A^1 \bar{x}^1_q - \ldots - A^K \bar{x}^K_q)$ e $\gamma^\ell = -c^1 \bar{x}^1_q - \ldots - c^K \bar{x}^K_q$. Logo, podemos aplicar o método subgradiente, usando como subgradiente:

Método Subgradiente

Substituindo em x^k todos os pontos extremos de $\mathcal{X}^k$, os quais são denotados por $\bar{x}^k_q, q \in Q^k$, obtemos:

$$\max_{p \in \mathcal{R}^m} \left\{ g(p) \quad = \min_{\substack{q \in Q^k \\ \forall k=1,\ldots,K}} \; c^1 \bar{x}^1_q + \ldots + c^K \bar{x}^K_q + \; p^T(b - A^1 \bar{x}^1_q - \ldots - A^K \bar{x}^K_q) \right\}$$

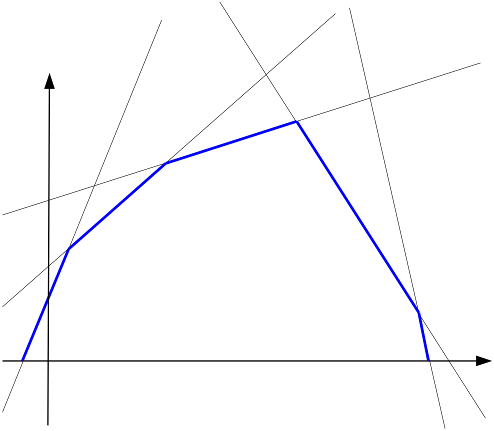
Assim, temos uma função côncava linear por partes, do tipo:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ g(p) = \min_{\ell=1,\ldots,L} \{ h^\ell p - \gamma^\ell \} \right\},$$

com $h^\ell = (b - A^1 \bar{x}^1_q - \ldots - A^K \bar{x}^K_q)$ e $\gamma^\ell = -c^1 \bar{x}^1_q - \ldots - c^K \bar{x}^K_q$. Logo, podemos aplicar o método subgradiente, usando como subgradiente:

$$s = (b - A^1 \bar{x}^1_q - \ldots - A^K \bar{x}^K_q).$$

Método Subgradiente



Método Subgradiente

- Em geral, não é viável calcular todos os pontos extremos de cada X^k a priori, então fazemos isso de forma iterativa;

Método Subgradiente

- Em geral, não é viável calcular todos os pontos extremos de cada X^k a priori, então fazemos isso de forma iterativa;
- Para um dado vetor de multiplicadores $\bar{p}$, cada subproblema de minimização é resolvido independentemente, como visto antes:

Método Subgradiente

- Em geral, não é viável calcular todos os pontos extremos de cada X^k a priori, então fazemos isso de forma iterativa;
- Para um dado vetor de multiplicadores $\bar{p}$, cada subproblema de minimização é resolvido independentemente, como visto antes:

$$g(\bar{p}) \quad = \quad \min_{\substack{x^k \in \mathcal{X}^k \\ \forall k=1,\ldots,K}} \; c^1 x^1 + \ldots + c^K x^K + \; \bar{p}^T (b - A^1 x^1 - \ldots - A^K x^K)$$

Método Subgradiente

- Em geral, não é viável calcular todos os pontos extremos de cada X^k a priori, então fazemos isso de forma iterativa;
- Para um dado vetor de multiplicadores $\bar{p}$, cada subproblema de minimização é resolvido independentemente, como visto antes:

$$
\begin{aligned}
g(\bar{p}) &= \min_{\substack{x^k \in \mathcal{X}^k \\ \forall k=1,\ldots,K}} c^1 x^1 + \ldots + c^K x^K + \bar{p}^T (b - A^1 x^1 - \ldots - A^K x^K) \\
&= \bar{p}^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - \bar{p}^T A^k) x^k
\end{aligned}
$$

Método Subgradiente

- Em geral, não é viável calcular todos os pontos extremos de cada X^k a priori, então fazemos isso de forma iterativa;
- Para um dado vetor de multiplicadores $\bar{p}$, cada subproblema de minimização é resolvido independentemente, como visto antes:

$$\begin{aligned} g(\bar{p}) &= \min_{\substack{x^k \in \mathcal{X}^k \\ \forall k=1,\ldots,K}} c^1 x^1 + \ldots + c^K x^K + \bar{p}^T(b - A^1 x^1 - \ldots - A^K x^K) \\ &= \bar{p}^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - \bar{p}^T A^k) x^k \end{aligned}$$

- Então, os pontos extremos $\bar{x}_q^k$ (um de cada subproblema) são usados para calcular o subgradiente:

$$s = (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K).$$

Método Subgradiente

1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:

Método Subgradiente

1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:
2. Resolver cada subproblema $\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^i A^k) x^k$;

Método Subgradiente

1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:
2. Resolver cada subproblema $\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^i A^k) x^k$;
3. Sejam $\bar{x}_q^k$ os pontos extremos obtidos como solução dos subproblemas;

Método Subgradiente

1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:
2. Resolver cada subproblema $\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^i A^k) x^k$;
3. Sejam $\bar{x}_q^k$ os pontos extremos obtidos como solução dos subproblemas;
4. Calcular o subgradiente $s^i = (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K)$;

Método Subgradiente

1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:
2. Resolver cada subproblema $\min_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^i A^k) x^k$;
3. Sejam $\bar{x}_q^k$ os pontos extremos obtidos como solução dos subproblemas;
4. Calcular o subgradiente $s^i = (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K)$;
5. Determinar um tamanho de passo $\alpha_i > 0$;

Método Subgradiente

1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:
2. Resolver cada subproblema $\min\limits_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^i A^k) x^k$;
3. Sejam $\bar{x}_q^k$ os pontos extremos obtidos como solução dos subproblemas;
4. Calcular o subgradiente $s^i = (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K)$;
5. Determinar um tamanho de passo $\alpha_i > 0$;
6. Obter um novo vetor de multiplicadores $p^{i+1} = p^i + \alpha_i s^i$;

Método Subgradiente

1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:
2. Resolver cada subproblema $\min\limits_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^i A^k)x^k$;
3. Sejam $\bar{x}_q^k$ os pontos extremos obtidos como solução dos subproblemas;
4. Calcular o subgradiente $s^i = (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K)$;
5. Determinar um tamanho de passo $\alpha_i > 0$;
6. Obter um novo vetor de multiplicadores $p^{i+1} = p^i + \alpha_i s^i$;
7. Se o critério de parada não for satisfeito, incrementar i e voltar para o Passo 2.

Método Subgradiente

1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:
2. Resolver cada subproblema $\min\limits_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^i A^k)x^k$;
3. Sejam $\bar{x}_q^k$ os pontos extremos obtidos como solução dos subproblemas;
4. Calcular o subgradiente $s^i = (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K)$;
5. Determinar um tamanho de passo $\alpha_i > 0$;
6. Obter um novo vetor de multiplicadores $p^{i+1} = p^i + \alpha_i s^i$;
7. Se o critério de parada não for satisfeito, incrementar i e voltar para o Passo 2.

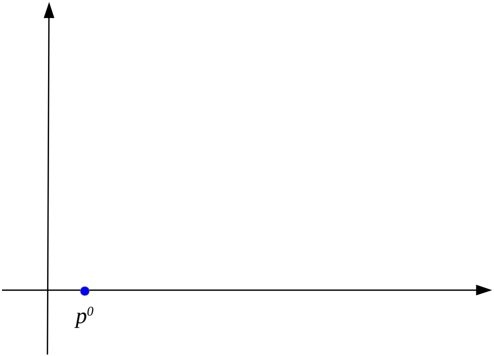
Obs.: Após a atualização de p na linha 6, deve-se redefinir como 0 as coordenadas que ficarem infactíveis;

Método Subgradiente ($p \leq 0$)

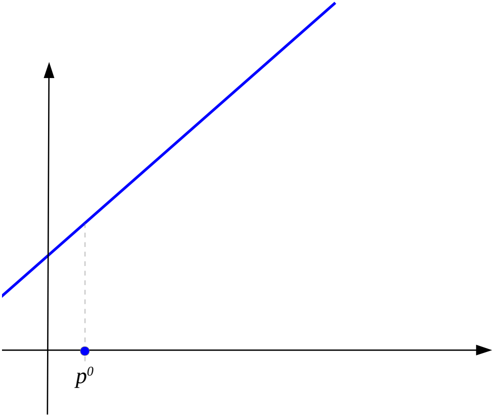
1. Iniciando com um multiplicador p^0 e índice $i = 0$, fazemos:
2. Resolver cada subproblema $\min\limits_{x^k \in \mathcal{X}^k} (c^k - p^i A^k) x^k$;
3. Sejam $\bar{x}_q^k$ os pontos extremos obtidos como solução dos subproblemas;
4. Calcular o subgradiente $s^i = (b - A^1 \bar{x}_q^1 - \ldots - A^K \bar{x}_q^K)$;
5. Determinar um tamanho de passo $\alpha_i > 0$;
6. Obter um novo vetor de multiplicadores $p^{i+1} = \min\{0, p^i + \alpha_i s^i\}$;
7. Se o critério de parada não for satisfeito, incrementar i e voltar para o Passo 2.

Método Subgradiente

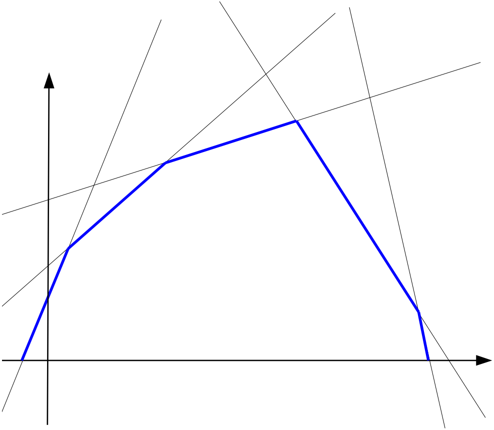
Método Subgradiente



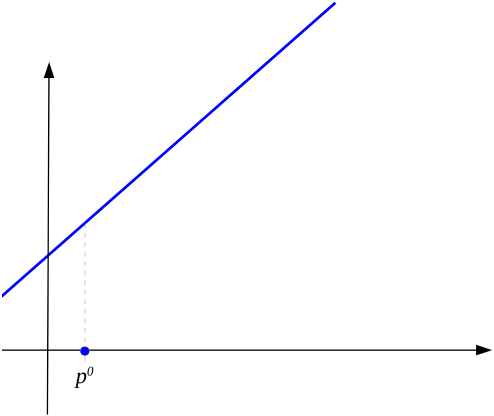
Método Subgradiente



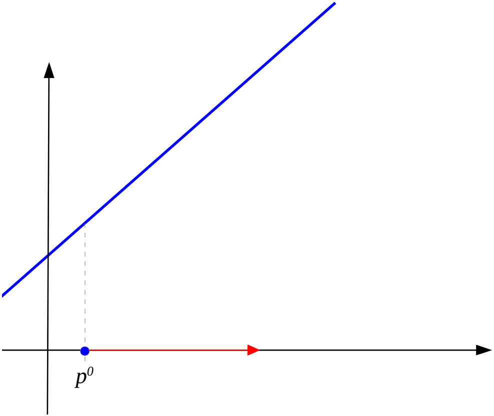
Método Subgradiente



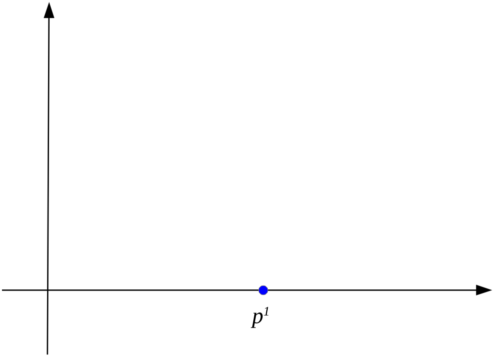
Método Subgradiente



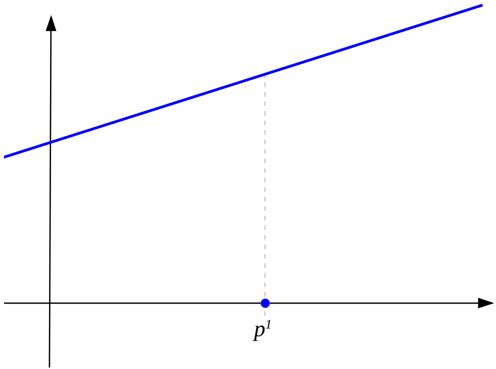
Método Subgradiente



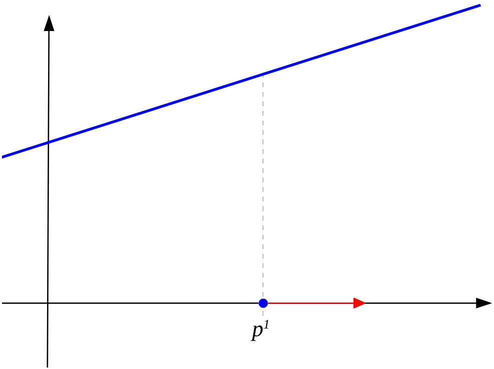
Método Subgradiente



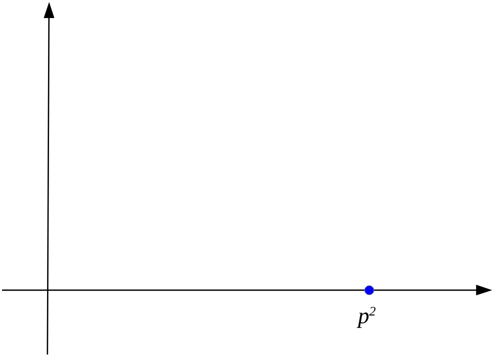
Método Subgradiente



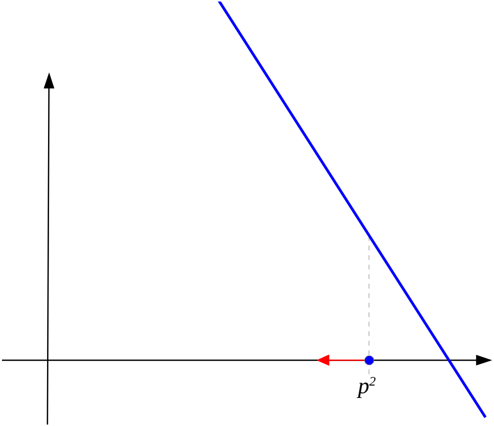
Método Subgradiente



Método Subgradiente



Método Subgradiente



Método Subgradiente

- O método é “sem memória”!

Método Subgradiente

- O método é "sem memória"!
  Os pontos extremos encontrados em iterações anteriores são descartados.

Método Subgradiente

- O método é “sem memória”!
  Os pontos extremos encontrados em iterações anteriores são descartados.
- O método é sensível à escolha do tamanho de passo α_i;

Método Subgradiente

- O método é "sem memória"!
  Os pontos extremos encontrados em iterações anteriores são descartados.
- O método é sensível à escolha do tamanho de passo α_i;
  Essa é a grande dificuldade do método.

Método Subgradiente

- O método é "sem memória"!
  Os pontos extremos encontrados em iterações anteriores são descartados.
- O método é sensível à escolha do tamanho de passo α_i;
  Essa é a grande dificuldade do método.
- Para garantir convergência, podemos usar uma *série divergente*, dado que:
  - Se $\sum_i \alpha_i \to \infty$ e $\alpha_i \to 0$ quando $i \to \infty$, então $g(p^i) \to g(p^*)$, sendo $g(p^*)$ o valor ótimo do problema dual Lagrangiano;
    (ver Wolsey (1998), p. 174)

Método Subgradiente

- O método é "sem memória"!
  Os pontos extremos encontrados em iterações anteriores são descartados.
- O método é sensível à escolha do tamanho de passo α_i;
  Essa é a grande dificuldade do método.
- Para garantir convergência, podemos usar uma *série divergente*, dado que:
  - Se $\sum_i \alpha_i \to \infty$ e $\alpha_i \to 0$ quando $i \to \infty$, então $g(p^i) \to g(p^*)$,
    sendo $g(p^*)$ o valor ótimo do problema dual Lagrangiano;
    (ver Wolsey (1998), p. 174)

  (importante na teoria, mas a convergência pode ser lenta!)

Método Subgradiente

- Regras comumente usadas (séries geométricas):
    1. $\alpha_i = (\delta)^i \alpha_0$, para algum $\delta < 1$;

Método Subgradiente

- Regras comumente usadas (séries geométricas):
  1. $\alpha_i = (\delta)^i \alpha_0$, para algum $\delta < 1$;
     Garante que $g(p^i) \rightarrow g(p^*)$ se α_0 e δ forem suficientemente grandes;

Método Subgradiente

- Regras comumente usadas (séries geométricas):
  1. $\alpha_i = (\delta)^i \alpha_0$, para algum $\delta < 1$;
     Garante que $g(p^i) \rightarrow g(p^*)$ se α_0 e δ forem suficientemente grandes;
  2. $\alpha_i = \varepsilon_i \dfrac{(LS - g(p^i))}{\|s^i\|^2}$,
     com $0 < \varepsilon_i < 2$ e LS limitante superior para $g(p^*)$;

Método Subgradiente

- Regras comumente usadas (séries geométricas):

  1. $\alpha_i = (\delta)^i \alpha_0$, para algum $\delta < 1$;
     Garante que $g(p^i) \to g(p^*)$ se α_0 e δ forem suficientemente grandes;

  2. $\alpha_i = \varepsilon_i \dfrac{(LS - g(p^i))}{\|s^i\|^2}$,

     com $0 < \varepsilon_i < 2$ e LS limitante superior para $g(p^*)$;
     Pode-se fazer $\varepsilon_{i+1} = \delta * \varepsilon_i$ quando $g(p^{i+1}) \leq g(p^i)$, $\delta < 1$.

Método Subgradiente

- Pode-se usar também um valor aproximado $\bar{g}$ (p.ex., um bom limitante inferior para $g(p^*)$): $\alpha_i = \varepsilon_i \dfrac{(\bar{g} - g(p^i))}{\|s^i\|^2}$;

Método Subgradiente

- Pode-se usar também um valor aproximado $\bar{g}$ (p.ex., um bom limitante inferior para $g(p^*)$): $\alpha_i = \varepsilon_i \dfrac{(\bar{g} - g(p^i))}{\|s^i\|^2}$;
- Nesse caso, $\bar{g}$ é uma *meta*, dado que:
  - Se $\bar{g} \leq g(p^*)$ e $\alpha_i = \varepsilon_i \dfrac{(\bar{g} - g(p^i))}{\|s^i\|^2}$ com $0 < \varepsilon_i < 2$, então $g(p^i) \to \bar{g}$, ou o algoritmo encontra p^i com $\bar{g} \leq g(p^i) \leq g(p^*)$. (ver Wolsey (1998), p. 174)

Método Subgradiente

- Pode-se usar também um valor aproximado $\bar{g}$ (p.ex., um bom limitante inferior para $g(p^*)$): $\alpha_i = \varepsilon_i \dfrac{(\bar{g} - g(p^i))}{\|s^i\|^2}$;
- Nesse caso, $\bar{g}$ é uma *meta*, dado que:
  - Se $\bar{g} \leq g(p^*)$ e $\alpha_i = \varepsilon_i \dfrac{(\bar{g} - g(p^i))}{\|s^i\|^2}$ com $0 < \varepsilon_i < 2$, então $g(p^i) \to \bar{g}$, ou o algoritmo encontra p^i com $\bar{g} \leq g(p^i) \leq g(p^*)$. (ver Wolsey (1998), p. 174)

Para mais detalhes:

1. Held et al., *Validation of subgradient optimization*, Math Progr, 1974;
2. Bazaraa and Sherali, *On the choice of step size in subgradient optimization*, EJOR, 1981.

Método Subgradiente

Math. Prog. Comp.
DOI 10.1007/s12532-017-0120-7

CrossMark

FULL LENGTH PAPER

On the computational efficiency of subgradient methods: a case study with Lagrangian bounds

Antonio Frangioni[1] · **Bernard Gendron**[2,3] · **Enrico Gorgone**[4,5]

Received: 1 November 2015 / Accepted: 20 April 2017

Abstract Subgradient methods (SM) have long been the preferred way to solve the large-scale Nondifferentiable Optimization problems arising from the solution of Lagrangian Duals (LD) of Integer Programs (IP). Although other methods can have better convergence rate in practice, SM have certain advantages that may make them competitive under the right conditions. Furthermore, SM have significantly progressed in recent years, and new versions have been proposed with better theoretical and practical performances in some applications. We computationally evaluate a large class of SM in order to assess if these improvements carry over to the IP setting. For this we

Método Subgradiente

Critério de parada:

- Idealmente, o critério de parada deveria ser $s^t = 0$ (condição necessária para ponto ótimo);

Método Subgradiente

Critério de parada:

- Idealmente, o critério de parada deveria ser $s^t = 0$ (condição necessária para ponto ótimo);
- Entretanto, esse critério é raramente atingido na prática

Método Subgradiente

Critério de parada:

- Idealmente, o critério de parada deveria ser $s^t = 0$ (condição necessária para ponto ótimo);
- Entretanto, esse critério é raramente atingido na prática e, assim, o algoritmo é terminado quando um número máximo de iterações é atingido

Método Subgradiente

Critério de parada:

- Idealmente, o critério de parada deveria ser $s^t = 0$ (condição necessária para ponto ótimo);
- Entretanto, esse critério é raramente atingido na prática e, assim, o algoritmo é terminado quando um número máximo de iterações é atingido ou quando a mudança no valor da função objetivo se torna muito pequena.

Método Subgradiente

Exercício: Resolva o problema de dimensionamento de lotes abaixo usando Relaxação Lagrangiana e o método subgradiente.

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\
& x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \;\; I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método Subgradiente

Após aplicar relaxação Lagrangiana:

$$\max_{p_1,p_2,p_3 \leq 0} 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 +$$

$$
\begin{aligned}
+ \min \quad & (1.0 - 0.1p_1)x_{11} + (1.5 - 0.1p_2)x_{12} \\
& +(2.0 - 0.1p_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
+ \min \quad & (0.5 - 0.08p_1)x_{21} + (0.5 - 0.08p_2)x_{22} \\
& +(0.9 - 0.08p_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método Subgradiente

▷ Implementação em OCTAVE

```
### SP1:
#               x11      x12      x13      I11      I12      I10      I13
f1 = [           1;     1.5;       2;     0.5;    0.25;       0;       0]
D1 = [           1        0        0       -1        0        1       0;
                 0        1        0        1       -1        0       0;
                 0        0        1        0        1        0      -1;
                 0        0        0        0        0        1       0]
lb1 = [          0;       0;       0;       0;       0;       0;       0]
ub1 = [       4500;    3600;    1800;    3600;    1800;       0;       0]
d1 =  [ 900; 1800; 1800; 0]

### SP2:
#               x21      x22      x23      I21      I22      I20      I23
f2 = [         0.5;     0.5;     0.9;    0.25;    0.25;      0;       0]
D2 = [           1        0        0       -1        0        1       0;
                 0        1        0        1       -1        0       0;
                 0        0        1        0        1        0      -1;
                 0        0        0        0        0        1       0]
lb2 = [          0;       0;       0;       0;       0;       0;       0]
ub2 = [       1800;    1400;     800;    1400;     800;       0;       0]
d2 = [ 400; 600; 800; 0]
```

Método Subgradiente

▷ Implementação em OCTAVE

```
#### INITIALIZATION

AA = []
bb = []

p = [0; 0; 0]
b = [240; 320; 200]
epsilon = 1
UB = 10000

g = -10000
g_old = -10000
```

Método Subgradiente

▷ Implementação em OCTAVE

```
### SUBGRAD ITERATION

### SP1:
f1 = [1 - 0.1 * p(1); 1.5 - 0.1 * p(2); 2 - 0.1 * p(3); 0.5; 0.25; 0; 0]
[x1,F1] = linprog(f1, AA, bb, D1, d1, lb1, ub1)

### SP2:
f2 = [0.5 - 0.08 * p(1); 0.5 - 0.08 * p(2); 0.9 - 0.08 * p(3); 0.25; 0.25; 0; 0]
[x2,F2] = linprog(f2, AA, bb, D2, d2, lb2, ub2)

### Update
s = b - 0.1 * x1(1:3) - 0.08 * x2(1:3)
normsubgr2 = norm(s)^2

g_old = g
g = b' * p + F1 + F2
if(g < g_old && epsilon > 0.01)
   epsilon = 0.9 * epsilon
end

alpha = epsilon * (UB - g) / normsubgr2
p = min(0, p + alpha * s)
```

Método Subgradiente

▷ Implementação em OCTAVE

```
(0.000000, -4.242613, 0.000000) -10000.000000
(-4.122144, 0.000000, 0.000000) 7850.000000
(-0.487270, -4.682210, 0.000000) 6762.363816
(-4.196470, -0.589301, 0.000000) 7363.587001
(-1.025348, -4.674136, 0.000000) 6763.001061
(-4.200038, -1.171029, 0.000000) 7444.390268
(-1.444305, -4.720787, 0.000000) 6921.627466
(-4.202613, -1.677137, 0.000000) 7532.392028
(-1.799468, -4.772714, 0.000000) 7028.196715
(-4.536178, -1.696741, 0.000000) 7609.016505
(-2.340438, -4.525152, 0.000000) 7107.293036
(-4.634673, -1.946508, 0.000000) 7572.635669
(-0.878693, -4.747578, 0.000000) 7305.544672
(-3.006286, -2.399889, 0.000000) 7594.401210
(0.000000, -4.677677, 0.000000) 6855.596149
(-2.056389, -2.408558, 0.000000) 7826.448513
(-3.565066, -0.712854, 0.000000) 6623.143437
(-2.103693, -2.595301, 0.000000) 7812.518471
(-3.485926, -1.041717, 0.000000) 7537.676013
(-2.202378, -2.695100, 0.000000) 7773.171801
(-3.448211, -1.294826, 0.000000) 7597.001773
(-2.313653, -2.756291, 0.000000) 7769.908258
(-3.429731, -1.501856, 0.000000) 7639.924602
(-2.423187, -2.798421, 0.000000) 7780.192840
...
```

Método Subgradiente

▷ Implementação em OCTAVE

```
...
(-1.884758, -1.909916, 0.000000) 7907.213143
(-1.917284, -1.873358, 0.000000) 7908.154076
(-1.886213, -1.913382, 0.000000) 7906.614258
(-1.918748, -1.876814, 0.000000) 7908.510882
(-1.859165, -1.921248, 0.000000) 7906.023608
(-1.891836, -1.884528, 0.000000) 7908.747300
(-1.832362, -1.928881, 0.000000) 7897.338458
(-1.865166, -1.892011, 0.000000) 7912.601883
(-1.897690, -1.855455, 0.000000) 7888.776075
(-1.866612, -1.895487, 0.000000) 7906.743027
(-1.899146, -1.858921, 0.000000) 7908.101815
(-1.868074, -1.898946, 0.000000) 7906.147682
(-1.900616, -1.862369, 0.000000) 7908.456770
(-1.869549, -1.902388, 0.000000) 7905.560527
(-1.902101, -1.865801, 0.000000) 7908.807436
(-1.871039, -1.905813, 0.000000) 7904.981455
(-1.903599, -1.869216, 0.000000) 7909.153867
(-1.872542, -1.909221, 0.000000) 7904.410360
(-1.905112, -1.872615, 0.000000) 7909.496121
(-1.874060, -1.912613, 0.000000) 7903.847137
(-1.906638, -1.875997, 0.000000) 7909.834252
(-1.847093, -1.920403, 0.000000) 7903.291683
(-1.879805, -1.883636, 0.000000) 7910.104504
...
```

Método Subgradiente

- Vantagens:

Método Subgradiente

- Vantagens: "simples" de implementar;

Método Subgradiente

- Vantagens: “simples” de implementar; iterações rápidas.

Método Subgradiente

- Vantagens: "simples" de implementar; iterações rápidas.
- Desvantagens: sensível a escolha do passo;

Método Subgradiente

- Vantagens: "simples" de implementar; iterações rápidas.
- Desvantagens: sensível a escolha do passo; "sem memória".

Método Subgradiente

- Vantagens: "simples" de implementar; iterações rápidas.
- Desvantagens: sensível a escolha do passo; "sem memória".
- Em planos de corte, as soluções dos subproblemas são mantidas na forma de restrições no problema mestre e, assim, não são esquecidas (nem recalculadas);

Método Subgradiente

- Vantagens: "simples" de implementar; iterações rápidas.
- Desvantagens: sensível a escolha do passo; "sem memória".
- Em planos de corte, as soluções dos subproblemas são mantidas na forma de restrições no problema mestre e, assim, não são esquecidas (nem recalculadas);
- Já no subgradiente, as soluções são usadas para calcular a direção apenas. Uma vez que o ponto foi atualizado, essa direção é esquecida.

Método Subgradiente

- Vantagens: "simples" de implementar; iterações rápidas.
- Desvantagens: sensível a escolha do passo; "sem memória".
- Em planos de corte, as soluções dos subproblemas são mantidas na forma de restrições no problema mestre e, assim, não são esquecidas (nem recalculadas);
- Já no subgradiente, as soluções são usadas para calcular a direção apenas. Uma vez que o ponto foi atualizado, essa direção é esquecida.
- É comum ter-se um comportamento *zig-zag* como no método gradiente, em que os multiplicadores oscilam de um lado para o outro em iterações consecutivas, sem progredir com o valor da função objetivo;

Método Subgradiente

- Vantagens: "simples" de implementar; iterações rápidas.
- Desvantagens: sensível a escolha do passo; "sem memória".
- Em planos de corte, as soluções dos subproblemas são mantidas na forma de restrições no problema mestre e, assim, não são esquecidas (nem recalculadas);
- Já no subgradiente, as soluções são usadas para calcular a direção apenas. Uma vez que o ponto foi atualizado, essa direção é esquecida.
- É comum ter-se um comportamento *zig-zag* como no método gradiente, em que os multiplicadores oscilam de um lado para o outro em iterações consecutivas, sem progredir com o valor da função objetivo;
- Esse comportamento é ainda pior no subgradiente, devido zerarmos as componentes que se tornam positivas.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?