Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 11.4: Relaxação Lagrangiana em problemas discretos

Objetivos deste tópico

- Estudar a aplicação da Relaxação Lagrangiana em problemas de otimização linear discretos, seus benefícios e suas particularidades.

Problemas de otimização discretos

- Até o momento, vimos a aplicação da Relaxação Lagrangiana a problemas de otimização contínua;

Problemas de otimização discretos

- Até o momento, vimos a aplicação da Relaxação Lagrangiana a problemas de otimização contínua;
- Qual a principal vantagem nesse contexto?

Problemas de otimização discretos

- Até o momento, vimos a aplicação da Relaxação Lagrangiana a problemas de otimização contínua;
- Qual a principal vantagem nesse contexto?
  Permite explorar a estrutura do problema, reduzindo-o a problemas "mais fáceis";

Problemas de otimização discretos

- Até o momento, vimos a aplicação da Relaxação Lagrangiana a problemas de otimização contínua;
- Qual a principal vantagem nesse contexto?
  Permite explorar a estrutura do problema, reduzindo-o a problemas "mais fáceis";
- Nos últimos anos, com o avanço da computação e softwares de otimização, essa vantagem já não é tão significativa;

Problemas de otimização discretos

- Até o momento, vimos a aplicação da Relaxação Lagrangiana a problemas de otimização contínua;
- Qual a principal vantagem nesse contexto?
  Permite explorar a estrutura do problema, reduzindo-o a problemas “mais fáceis”;
- Nos últimos anos, com o avanço da computação e softwares de otimização, essa vantagem já não é tão significativa;
- Assim, a Relaxação Lagrangiana tem sua principal aplicação em problemas de otimização *discreta*.

Problemas de otimização discretos

Principais motivos para seu sucesso em otimização *discreta*:

Problemas de otimização discretos

Principais motivos para seu sucesso em otimização *discreta*:

- Os *subproblemas* são tipicamente problemas de otimização combinatória e, assim, resolvê-los separadamente pode contribuir significativamente para a melhoria do desempenho;

Problemas de otimização discretos

Principais motivos para seu sucesso em otimização *discreta*:

- Os *subproblemas* são tipicamente problemas de otimização combinatória e, assim, resolvê-los separadamente pode contribuir significativamente para a melhoria do desempenho;
- Se forem problemas clássicos, como o problema da mochila, de caminho mínimo, etc.,

Problemas de otimização discretos

Principais motivos para seu sucesso em otimização *discreta*:

- Os *subproblemas* são tipicamente problemas de otimização combinatória e, assim, resolvê-los separadamente pode contribuir significativamente para a melhoria do desempenho;
- Se forem problemas clássicos, como o problema da mochila, de caminho mínimo, etc., podem ser usados algoritmos específicos para resolvê-los de forma mais eficiente;

Problemas de otimização discretos

Principais motivos para seu sucesso em otimização *discreta*:

- Os *subproblemas* são tipicamente problemas de otimização combinatória e, assim, resolvê-los separadamente pode contribuir significativamente para a melhoria do desempenho;
- Se forem problemas clássicos, como o problema da mochila, de caminho mínimo, etc., podem ser usados algoritmos específicos para resolvê-los de forma mais eficiente;
- O problema dual Lagrangiano fornece um *limitante inferior* para o problema original (minimização) que, em muitas vezes, é bem melhor que aquele fornecido pela relaxação linear.

Problemas de otimização discretos

Principais motivos para seu sucesso em otimização *discreta*:

- Os *subproblemas* são tipicamente problemas de otimização combinatória e, assim, resolvê-los separadamente pode contribuir significativamente para a melhoria do desempenho;
- Se forem problemas clássicos, como o problema da mochila, de caminho mínimo, etc., podem ser usados algoritmos específicos para resolvê-los de forma mais eficiente;
- O problema dual Lagrangiano fornece um *limitante inferior* para o problema original (minimização) que, em muitas vezes, é bem melhor que aquele fornecido pela relaxação linear. Por que?

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& Dx = d, \\
& x \in \mathbb{Z}_+^n
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$\begin{array}{lll} \min & f(x) = c^T x, & \\ \text{s.a} & Ax = b, & \text{(restrições de acoplamento)} \\ & Dx = d, & \text{(estrutura em blocos)} \\ & x \in \mathbb{Z}^n_+ & \end{array}$$

$$D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$
\begin{array}{rlll}
\text{min} & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K & & \\
\text{s.a} & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K & & = b \\
& D^1x^1 & & = d^1 \\
& \quad D^2x^2 & & = d^2 \\
& \qquad \ddots & & \vdots \\
& \qquad\qquad D^Kx^K & & = d^K \\
& \quad x \in \mathbb{Z}^n_+ & &
\end{array}
$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} g(p) = \min_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \quad & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K + \; p^T(b - A^1x^1 - A^2x^2 - \ldots - A^Kx^K) \\ \text{s.a} \quad & D^1x^1 = d^1 \\ & D^2x^2 = d^2 \\ & \qquad \ddots \qquad \vdots \\ & D^Kx^K = d^K \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

Para um dado vetor de multiplicadores $p \in \mathbb{R}^m$:

$$
\begin{aligned}
g(p) = \min_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \quad & c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K + \; p^T(b - A^1x^1 - A^2x^2 - \ldots - A^Kx^K) \\
\text{s.a} \quad & D^1x^1 = d^1 \\
& D^2x^2 = d^2 \\
& \quad \ddots \qquad \vdots \\
& D^Kx^K = d^K
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(p) = \min_{x \in \mathbb{Z}^n_+} \quad & p^Tb + (c^1 - p^TA^1)x^1 + (c^2 - p^TA^2)x^2 + \ldots + (c^K - p^TA^K)x^K \\
\text{s.a} \quad & D^1x^1 = d^1 \\
& D^2x^2 = d^2 \\
& \quad \ddots \qquad \vdots \\
& D^Kx^K = d^K
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$g(p) \quad = \quad p^T b$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$\begin{aligned} g(p) \quad = \quad & p^T b \\ & + \min_{x^1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\ & + \ldots \\ & + \min_{x^K \in \mathbb{Z}_+^{n_K}} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \end{aligned}$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$
\begin{aligned}
g(p) &= p^T b \\
&\quad + \min_{x^1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \min_{x^K \in \mathbb{Z}_+^{n_K}} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
&= p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}
$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$\begin{aligned}
g(p) \quad &= \quad p^T b \\
&\quad + \min_{x^1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}} \{(c^1 - p^T A^1) x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \min_{x^K \in \mathbb{Z}_+^{n_K}} \{(c^K - p^T A^K) x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
&= \quad p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$\begin{aligned}
g(p) \quad &= \quad p^T b \\
&\quad + \min_{x^1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \min_{x^K \in \mathbb{Z}_+^{n_K}} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
&= \quad p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Em geral, $g(p) \leq f(x^*)$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$;

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$
\begin{aligned}
g(p) &= p^T b \\
&\quad + \min_{x^1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \min_{x^K \in \mathbb{Z}_+^{n_K}} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
&= p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}
$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Em geral, $g(p) \leq f(x^*)$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$;
- Melhor limitante $\rightarrow$ Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p)$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Discreta

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b \\ &\quad + \min_{x^1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \min_{x^K \in \mathbb{Z}_+^{n_K}} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\ &= p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \end{aligned}$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Em geral, $g(p) \leq f(x^*)$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$;
- Melhor limitante $\rightarrow$ Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Contínua

$$
\begin{aligned}
g(p) &= p^T b \\
&\quad + \min_{x^1 \geq 0} \{(c^1 - p^T A^1)x^1 \mid D^1 x^1 = d^1\} \\
&\quad + \min_{x^2 \geq 0} \{(c^2 - p^T A^2)x^2 \mid D^2 x^2 = d^2\} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \min_{x^K \geq 0} \{(c^K - p^T A^K)x^K \mid D^K x^K = d^K\} \\
&= p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}
\end{aligned}
$$

- Para todo $p \in \mathbb{R}^m$ e x factível: $g(p) \leq f(x)$;
- Problema Dual Lagrangiano:

$$
\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}
$$

Relaxação Lagrangiana em Otimização Contínua

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& Dx = d, \\
& x \in \mathbb{R}^n_+
\end{aligned}
$$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Problemas de otimização discretos

- Temos sempre

$$\min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\}$$

Problemas de otimização discretos

- Temos sempre

$$\min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \geq$$

Problemas de otimização discretos

- Temos sempre

$$\min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \geq \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\};$$

Problemas de otimização discretos

- Temos sempre

$$\min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \geq \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\};$$

- Assim, pelo domínio dos subproblemas, a Relaxação Lagrangiana mantém a integralidade das variáveis no caso discreto.

Problemas de otimização discretos

- Temos sempre

$$\min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \geq \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\};$$

- Assim, pelo domínio dos subproblemas, a Relaxação Lagrangiana mantém a integralidade das variáveis no caso discreto.
- A solução ótima de cada subproblema é inteira e, portanto, o limitante fornecido pelo problema dual Lagrangiano é melhor do que aquele obtido pela relaxação linear do problema original.

Problemas de otimização discretos

- Temos sempre

$$\min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \geq \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\};$$

- Assim, pelo domínio dos subproblemas, a Relaxação Lagrangiana mantém a integralidade das variáveis no caso discreto.
- A solução ótima de cada subproblema é inteira e, portanto, o limitante fornecido pelo problema dual Lagrangiano é melhor do que aquele obtido pela relaxação linear do problema original.
- E se o subproblema tiver a propriedade de integralidade?

Problemas de otimização discretos

- Temos sempre

$$\min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \geq \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\};$$

- Assim, pelo domínio dos subproblemas, a Relaxação Lagrangiana mantém a integralidade das variáveis no caso discreto.
- A solução ótima de cada subproblema é inteira e, portanto, o limitante fornecido pelo problema dual Lagrangiano é melhor do que aquele obtido pela relaxação linear do problema original.
- E se o subproblema tiver a propriedade de integralidade? (i.e. a solução ótima da relaxação linear está em $\mathbb{Z}_+^{n_k}$)

Problemas de otimização discretos

- Temos sempre

$$\min_{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \geq \min_{x^k \geq 0} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\};$$

- Assim, pelo domínio dos subproblemas, a Relaxação Lagrangiana mantém a integralidade das variáveis no caso discreto.
- A solução ótima de cada subproblema é inteira e, portanto, o limitante fornecido pelo problema dual Lagrangiano é melhor do que aquele obtido pela relaxação linear do problema original.
- E se o subproblema tiver a propriedade de integralidade? (i.e. a solução ótima da relaxação linear está em $\mathbb{Z}_+^{n_k}$)
  R: Ruim, pois temos igualdade na relação acima :(

PDL com restrição de capacidade e tempo de preparação

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} s_i y_{it}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{s.a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i x_{it} + st_i y_{it}) \le b_t, & t = 1,\ldots,T, \\
& x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, & i = 1,\ldots,n; \quad t = 1,\ldots,T, \\
& x_{it} \le C y_{it}, & i = 1,\ldots,n; \quad t = 1,\ldots,T, \\
& I_{i0} = 0, & i = 1,\ldots,n, \\
& x_{it} \ge 0,\ I_{it} \ge 0,\ y_{it} \in \{0,1\} & i = 1,\ldots,n; \quad t = 1,\ldots,T.
\end{array}$$

PDL com restrição de capacidade e tempo de preparação

▷ Exemplo

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A produção de uma bebida em um dado período requer a limpeza e resfriamento do tanque. Esse tempo é de 12 horas para a bebida 1 e 8 horas para a bebida 2. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e estocar de cada bebida em cada período.

	Bebida 1			Bebida 2		
Período	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—
Custo prep (R$)	2.0	4.0	4.0	8.0	8.0	8.0

PDL com restrição de capacidade e tempo de preparação

▷ Exemplo: formulação

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
& +2.0y_{11} + 4.0y_{12} + 4.0y_{13} + 8.0y_{21} + 8.0y_{22} + 8.0y_{23} \\
\text{s.a} & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} + 12y_{11} + 8y_{21} \le 240 \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} + 12y_{12} + 8y_{22} \le 320 \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} + 12y_{13} + 8y_{23} \le 200 \\
& x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& x_{11} \le 5000y_{11} \qquad x_{21} \le 5000y_{21} \\
& x_{12} \le 5000y_{12} \qquad x_{22} \le 5000y_{22} \\
& x_{13} \le 5000y_{13} \qquad x_{23} \le 5000y_{23} \\
& I_{10} = 0, \;\; I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \ge 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \dots, I_{23} \ge 0 \\
& y_{11}, y_{12}, \dots, y_{23} \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

PDL com restrição de capacidade e tempo de preparação

▷ Exemplo: formulação

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
& +2.0y_{11} + 4.0y_{12} + 4.0y_{13} + 8.0y_{21} + 8.0y_{22} + 8.0y_{23} \\
\text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} + 12y_{11} + 8y_{21} \leq 240 \quad (p_1) \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} + 12y_{12} + 8y_{22} \leq 320 \quad (p_2) \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} + 12y_{13} + 8y_{23} \leq 200 \quad (p_3) \\
& x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& x_{11} \leq 5000y_{11} \qquad x_{21} \leq 5000y_{21} \\
& x_{12} \leq 5000y_{12} \qquad x_{22} \leq 5000y_{22} \\
& x_{13} \leq 5000y_{13} \qquad x_{23} \leq 5000y_{23} \\
& I_{10} = 0, \; I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0 \\
& y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{23} \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

PDL com restrição de capacidade e tempo de preparação

▷ Exemplo: problema dual Lagrangiano

$$\max_{p_1,p_2,p_3 \le 0} 240p_1 + 320p_2 + 200p_3 +$$

$$\begin{aligned}
+\ \text{min} \quad & (1.0 - 0.1p_1)x_{11} + (1.5 - 0.1p_2)x_{12} \\
& +(2.0 - 0.1p_3)x_{13} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} \\
& +(2.0 - 12.0p_1)y_{11} + (4.0 - 12.0p_2)y_{12} \\
& +(4.0 - 12.0p_3)y_{13} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{11} \le 5000y_{11} \\
& x_{12} \le 5000y_{12} \\
& x_{13} \le 5000y_{13} \\
& I_{10} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13} \ge 0 \\
& I_{11}, I_{12}, I_{13} \ge 0 \\
& y_{11}, y_{12}, y_{13} \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+\ \text{min} \quad & (0.5 - 0.08p_1)x_{21} + (0.5 - 0.08p_2)x_{22} \\
& +(0.9 - 0.08p_3)x_{23} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
& +(8.0 - 8.0p_1)y_{21} + (8.0 - 8.0p_2)y_{22} \\
& +(8.0 - 8.0p_3)y_{23} \\
\text{s.a} \quad & x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& x_{21} \le 5000y_{21} \\
& x_{22} \le 5000y_{22} \\
& x_{23} \le 5000y_{23} \\
& I_{20} = 0 \\
& x_{21}, x_{22}, x_{23} \ge 0 \\
& I_{21}, I_{22}, I_{23} \ge 0 \\
& y_{21}, y_{22}, y_{23} \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Problemas de otimização discretos

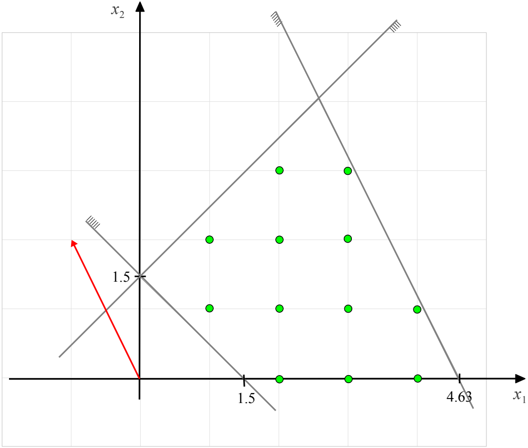
- A aplicação dos métodos continua a mesma no caso discreto;

Problemas de otimização discretos

- A aplicação dos métodos continua a mesma no caso discreto;
- Deve-se tomar cuidado apenas com a teoria do método de plano de cortes, pois a solução ótima dos subproblemas não é necessariamente um ponto extremo ou raio extremo!

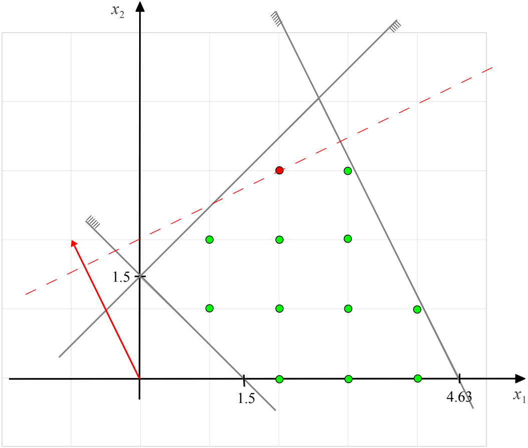
Problemas de otimização discretos

▷ Região factível do subproblema



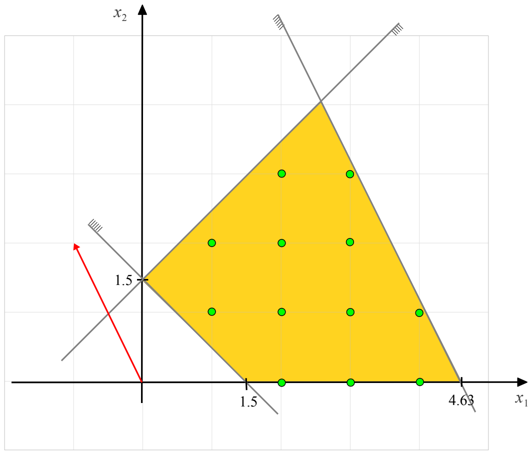
Problemas de otimização discretos

▷ Região factível do subproblema



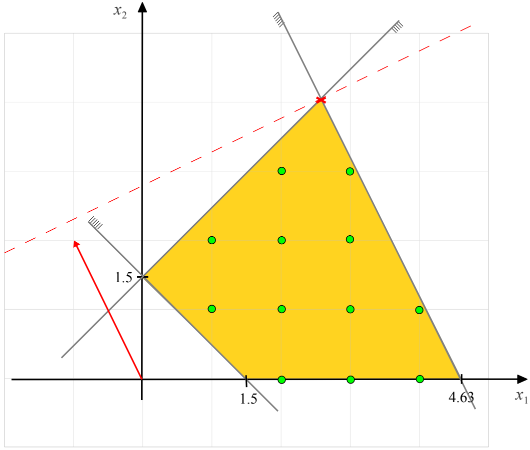
Problemas de otimização discretos

▷ Região factível do subproblema (relaxação linear)



Problemas de otimização discretos

▷ Região factível do subproblema (relaxação linear)



Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} \{ (c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k \} \right\}$$

com $\mathcal{X}^k = \{x^k \mid D^k x^k = d^k, x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}\}$;

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}$$

com $\mathcal{X}^k = \{x^k \mid D^k x^k = d^k, x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}\}$;

- Para formulá-lo como um problema de programação linear, precisamos eliminar as minimizações internas;

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Problema Dual Lagrangiano:

$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} \{(c^k - p^T A^k)x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}$$

com $\mathcal{X}^k = \{x^k \mid D^k x^k = d^k, x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}\}$;

- Para formulá-lo como um problema de programação linear, precisamos eliminar as minimizações internas;
- Para um dado p factível, temos que o k-ésimo subproblema pode ou ter solução ótima ou ser ilimitado;

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Problema Dual Lagrangiano:

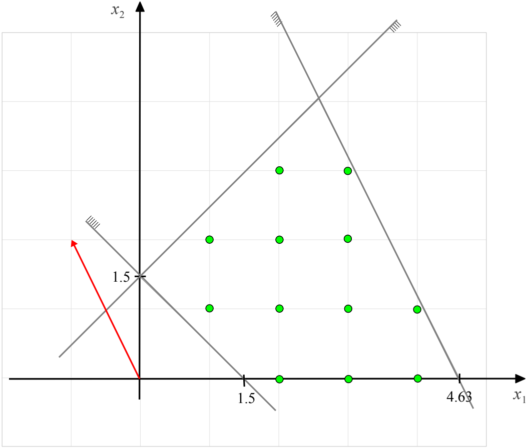
$$\max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ p^T b + \sum_{k=1}^{K} \min_{x^k \in \mathcal{X}^k} \{(c^k - p^T A^k) x^k \mid D^k x^k = d^k\} \right\}$$

com $\mathcal{X}^k = \{x^k \mid D^k x^k = d^k, x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}\}$;

- Para formulá-lo como um problema de programação linear, precisamos eliminar as minimizações internas;
- Para um dado p factível, temos que o k-ésimo subproblema pode ou ter solução ótima ou ser ilimitado;
- Para continuarmos com o conceito de pontos e raios extremos, precisamos recorrer ao envoltório convexo $\mathcal{C}^k$ dos pontos inteiros em $\mathcal{X}^k$, combinado com possíveis raios extremos do conjunto.

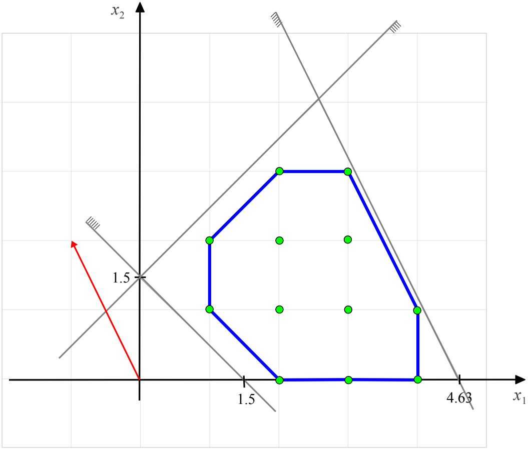
Problemas de otimização discretos

▷ Região factível do subproblema



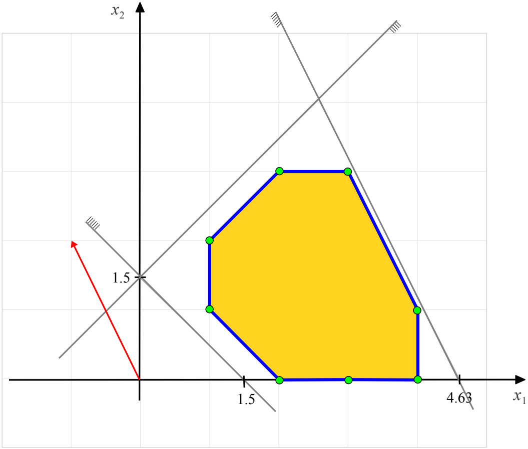
Problemas de otimização discretos

▷ Região factível do subproblema (envoltório)



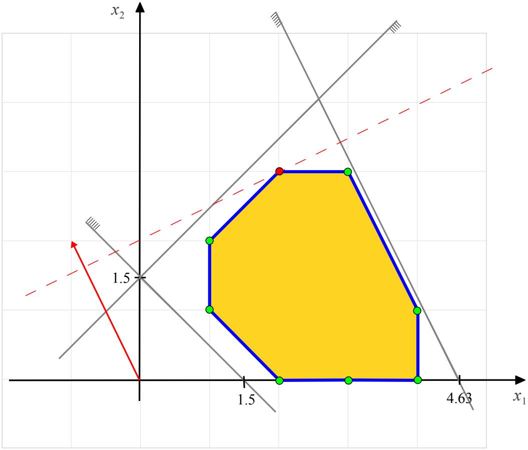
Problemas de otimização discretos

▷ Região factível do subproblema (envoltório)



Problemas de otimização discretos

▷ Região factível do subproblema (envoltório)



Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Assim, usando $\mathcal{C}^k$ em vez de $\mathcal{X}^k$, sabemos que se o subproblema possui solução ótima,

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Assim, usando $\mathcal{C}^k$ em vez de $\mathcal{X}^k$, sabemos que se o subproblema possui solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{C}^k$ tal que:

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Assim, usando $\mathcal{C}^k$ em vez de $\mathcal{X}^k$, sabemos que se o subproblema possui solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{C}^k$ tal que:

$$\min_{x^k \in \mathcal{C}^k} (c^k - p^T A^k) x^k = (c^k - p^T A^k) \bar{x}_*^k$$

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Assim, usando $\mathcal{C}^k$ em vez de $\mathcal{X}^k$, sabemos que se o subproblema possui solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{C}^k$ tal que:

$$\min_{x^k \in \mathcal{C}^k} (c^k - p^T A^k) x^k = (c^k - p^T A^k) \bar{x}_*^k = \min_{q \in Q^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k$$

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Assim, usando $\mathcal{C}^k$ em vez de $\mathcal{X}^k$, sabemos que se o subproblema possui solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{C}^k$ tal que:

$$\min_{x^k \in \mathcal{C}^k} (c^k - p^T A^k) x^k = (c^k - p^T A^k)\bar{x}_*^k = \min_{q \in Q^k} (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k$$

sendo Q_k o conjunto de índices de todos os pontos extremos de $\mathcal{C}^k$;

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Assim, usando $\mathcal{C}^k$ em vez de $\mathcal{X}^k$, sabemos que se o subproblema possui solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_*^k \in \mathcal{C}^k$ tal que:

$$\min_{x^k \in \mathcal{C}^k} (c^k - p^T A^k) x^k = (c^k - p^T A^k) \bar{x}_*^k = \min_{q \in Q^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k$$

sendo Q_k o conjunto de índices de todos os pontos extremos de $\mathcal{C}^k$;

- Temos então:

$$\begin{aligned} \max_p \min_{x^k \in \mathcal{C}^k} (c^k - p^T A^k) x^k &= \max_p \min_{q \in \mathcal{Q}^k} (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k \\ &= \max_{p,v} \{ v^k \mid v^k \leq (c^k - p^T A^k) \bar{x}_q^k \} \end{aligned}$$

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Caso o subproblema seja ilimitado, então existe um raio de descida:

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Caso o subproblema seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{C}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \rightarrow -\infty.$$

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Caso o subproblema seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{C}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \to -\infty.$$

Como estamos interessados em limitantes, esse valor é irrelevante e deve ser evitado impondo-se

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Caso o subproblema seja ilimitado, então existe um raio de descida:

$$\min_{x^k \in \mathcal{C}^k} (c^k - p^T A^k) x^k \to -\infty.$$

Como estamos interessados em limitantes, esse valor é irrelevante e deve ser evitado impondo-se

$$(c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad \forall r \in R^k,$$

sendo R^k o conjunto de todos os índices de raios extremos de $\mathcal{C}^k$.

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Logo, o problema Dual Lagrangiano se torna:

$$
\begin{aligned}
\max_{p,v} \quad & g(p) = p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \\
\text{s.a} \quad & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \quad k = 1, \ldots, K, \quad q \in Q^k, \\
& (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, K, \quad r \in R^k.
\end{aligned}
$$

sendo Q^k e R^k os conjuntos de índices de todos os pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{C}^k$, respectivamente.

Problemas de otimização discretos

▷ Método de planos de corte (geração de restrições)

- Logo, o problema Dual Lagrangiano se torna:

$$\begin{aligned} \max_{p,v} \quad & g(p) = p^T b + \sum_{k=1}^{K} v^k \\ \text{s.a} \quad & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_q^k \geq v^k, \quad k = 1, \ldots, K, \quad q \in Q^k, \\ & (c^k - p^T A^k)\bar{x}_r^k \geq 0, \quad k = 1, \ldots, K, \quad r \in R^k. \end{aligned}$$

  sendo Q^k e R^k os conjuntos de índices de todos os pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{C}^k$, respectivamente.

- Dado o número imenso de pontos e raios extremos, precisamos recorrer ao *Método de Planos de Corte*.

Problemas de otimização discretos

Mas algo precisa ficar bem claro no caso *discreto*:

Problemas de otimização discretos

Mas algo precisa ficar bem claro no caso *discreto*:

- O valor ótimo do dual Lagrangiano é apenas um limitante inferior para o valor ótimo do problema original;

Problemas de otimização discretos

Mas algo precisa ficar bem claro no caso *discreto*:

- O valor ótimo do dual Lagrangiano é apenas um limitante inferior para o valor ótimo do problema original;
- O Teorema da dualidade forte não vale em otimização discreta;

Problemas de otimização discretos

Mas algo precisa ficar bem claro no caso *discreto*:

- O valor ótimo do dual Lagrangiano é apenas um limitante inferior para o valor ótimo do problema original;
- O Teorema da dualidade forte não vale em otimização discreta;
- Assim, a Relaxação Lagrangiana e seus métodos (planos de corte, subgradiente) são usados para obter bons limitantes inferiores;

Problemas de otimização discretos

Mas algo precisa ficar bem claro no caso *discreto*:

- O valor ótimo do dual Lagrangiano é apenas um limitante inferior para o valor ótimo do problema original;
- O Teorema da dualidade forte não vale em otimização discreta;
- Assim, a Relaxação Lagrangiana e seus métodos (planos de corte, subgradiente) são usados para obter bons limitantes inferiores;
- Para garantir uma solução discreta, deve-se combinar com outros métodos: branch-and-bound, heurísticas, ...

Problemas de otimização discretos

▷ Heurística Lagrangiana

- Usar as soluções dos subproblemas para tentar determinar uma solução factível do problema original;

Problemas de otimização discretos

▷ Heurística Lagrangiana

- Usar as soluções dos subproblemas para tentar determinar uma solução factível do problema original;
- Por exemplo, em uma dada iteração do método subgradiente, a solução ótima de um dado subproblema provavelmente viola as restrições relaxadas (penalizadas);

Problemas de otimização discretos

▷ Heurística Lagrangiana

- Usar as soluções dos subproblemas para tentar determinar uma solução factível do problema original;
- Por exemplo, em uma dada iteração do método subgradiente, a solução ótima de um dado subproblema provavelmente viola as restrições relaxadas (penalizadas);
- Assim, são feitas tentativas de se factibilizar essas soluções de modo a obter uma solução factível para o problema original.

Problemas de otimização discretos

▷ Heurística Lagrangiana

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
European Journal of Operational Research 175 (2006) 1070–1083
EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH
www.elsevier.com/locate/ejor

Production, Manufacturing and Logistics

A Lagrangian-based heuristic for the capacitated lot-sizing problem in parallel machines

Franklina Maria Bragion Toledo [a], Vinícius Amaral Armentano [b,*]

[a] *Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 668, São Carlos–SP, CEP 13560-970, Brazil*
[b] *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Caixa Postal 6101, Campinas–SP, CEP 13083-970, Brazil*

Received 13 April 1999; accepted 17 June 2005
Available online 31 August 2005

Abstract

This paper addresses the capacitated lot-sizing problem involving the production of multiple items on unrelated parallel machines. A production plan should be determined in order to meet the forecast demand for the items, without exceeding the capacity of the machines and minimize the sum of production, setup and inventory costs. A heuristic based on the Lagrangian relaxation of the capacity constraints and subgradient optimization is proposed. Initially, the heuristic is tested on instances of the single machine problem and results are compared with heuristics from the literature. For parallel machines and small problems the heuristic performance is tested against optimal solutions, and for larger problems it is compared with the lower bound provided by the Lagrangian relaxation.
© 2005 Elsevier B.V. All rights reserved.

Problemas de otimização discretos

▷ Heurística Lagrangiana

2. Problem formulation

In order to state the problem mathematically, let

- s_{ij} setup cost of item i on machine j;
- c_{ij} unit production cost of item i on machine j;
- h_i unit inventory cost of item i;
- d_{it} demand of item i in period t;
- b_{ij} time to produce one unit of item i on machine j;
- f_{ij} setup time of item i on machine j;
- C_j capacity of machine j (in units of time);
- x_{ijt} amount of item i produced on machine j in period t (a decision variable);
- y_{ijt} a binary variable which assumes value 1 if item i is produced on machine j in period t and 0, otherwise (a decision variable);
- I_{it} inventory of item i at the end of period t (a decision variable);
- M an upper bound on x_{ijt}.

The CLSPP can be formulated as the following mixed integer programming model.

$$\text{Minimize} \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(s_{ij}y_{ijt} + c_{ij}x_{ijt}) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} h_i I_{it}$$

$$\text{subject to} \sum_{j=1}^{m} x_{ijt} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it} \quad i = 1,\ldots,n; \quad t = 1,\ldots,T, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(b_{ij}x_{ijt} + f_{ij}y_{ijt}) \leqslant C_j \quad j = 1,\ldots,m; \quad t = 1,\ldots,T, \tag{2}$$

$$x_{ijt} \leqslant M y_{ijt} \quad i = 1,\ldots,n; \quad j = 1,\ldots,m; \quad t = 1,\ldots,T, \tag{3}$$

$$y_{ijt} \in \{0,1\}, x_{ijt} \geqslant 0, I_{it} \geqslant 0 \quad i = 1,\ldots,n; \quad j = 1,\ldots,m; \quad t = 1,\ldots,T. \tag{4}$$

The objective function expresses the sum of setup, production and inventory costs. Constraints (1) represent the inventory balance equations. Constraints (2) indicate that the amount of capacity used for production is limited. Constraints (3) ensure the incidence of a setup cost and a setup time when x_{ijt} is positive.

Problemas de otimização discretos

▷ Heurística Lagrangiana

Int. J. Production Economics 119 (2009) 219–227

ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Int. J. Production Economics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijpe

A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem

M.C.N. Gramani [a,*], P.M. França [b], M.N. Arenales [c]

[a] *Faculdade IBMEC-SP, R. Quatá, 300 – Vila Olímpia – 04546-042, São Paulo, Brazil*
[b] *FCT, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Brazil*
[c] *ICMC, Universidade de São Paulo - USP, Brazil*

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 17 July 2008
Accepted 27 February 2009
Available online 18 March 2009

Keywords:
Lot-sizing
Cutting stock
Production planning
Mixed-integer programming
Lagrangian relaxation

A B S T R A C T

Industrial production processes involving both lot-sizing and cutting stock problems are common in many industrial settings. However, they are usually treated in a separate way, which could lead to costly production plans. In this paper, a coupled mathematical model is formulated and a heuristic method based on Lagrangian relaxation is proposed. Computational results prove its effectiveness.

© 2009 Elsevier B.V. All rights reserved.

Problemas de otimização discretos

▷ Heurística Lagrangiana

M.C.N. Gramani et al. / Int. J. Production Economics 119 (2009) 219–227 221

cp: unit cost of the plate to be cut;
c_{it}: unit production cost of final product i in period t;
h_{it}: unit inventory cost of final product i in period t;
s_{it}: setup cost of final product i in period t;
$L \times W$: length and width of the plate;
$l_p \times w_p$: length and width of the part of type p.

Variables:
x_{it}: number of final products i to be manufactured in period t;
I_{it}: number of final products i stocked at the end of period t;
y_{jt}: number of plates cut according to pattern j in period t;
z_{it}: binary variable: $z_{it} = 1$ if $x_{it} > 0$; zero, otherwise.

The following constraints should be considered.

Inventory balance of final products:

$$x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it}, \quad i = 1, \ldots, M; \;\; t = 1, \ldots, T \tag{1}$$

These constraints assure that the demand of final product i in period t (d_{it}) is met without delay, i.e., $I_{it} \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,M$; $t = 1,\ldots,T$. Without loss of generality, the initial inventory can be considered zero. Note that in this paper, the storage costs for the parts are not considered. Having in mind that the most important parcel of the storage cost is the alternate use of the immobilized capital incorporated in final products, the storage cost for the parts is implicitly considered in the final product holding cost.

Parts demand:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{pj} y_{jt} \geqslant \sum_{i=1}^{M} r_{pi} x_{it}, \quad p = 1, \ldots, P; \;\; t = 1, \ldots, T \tag{2}$$

The left hand side is the number of type p parts cut which has to be greater than or equal to the number of

The mixed-integer mathematical model (LCP) can be written then as follows:

$$Z = \text{Min} \quad \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} (c_{it} x_{it} + h_{it} I_{it} + s_{it} z_{it}) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} cpLW y_{jt} \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{it} + I_{i,t-1} - I_{it} = d_{it}, \quad i = 1, \ldots, M; \;\; t = 1, \ldots, T \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{pj} y_{jt} \geqslant \sum_{i=1}^{M} r_{pi} x_{it}, \quad p = 1, \ldots, P; \;\; t = 1, \ldots, T \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{M} v_i x_{it} \leqslant b_t, \quad t = 1, \ldots, T \tag{9}$$

$$x_{it} \leqslant Q z_{it}, \quad i = 1, \ldots, M; \;\; t = 1, \ldots, T \tag{10}$$

$$x_{it}, I_{it} \geqslant 0; \quad z_{it} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, M; \;\; t = 1, \ldots, T \tag{11}$$

$$y_{jt} \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, N; \;\; t = 1, \ldots, T \tag{12}$$

The integer condition on decision variables x_{it}, I_{it}, and y_{jt} can be relaxed if demands are high, but two difficulties still remain: the enormous quantity of cutting patterns (a_{pj}) that could be generated and the presence of 0–1 setup variables. Note that constraints (8) are those that couple decisions of lot-sizing and cutting. Next, we give two approaches to heuristically solve problem (6)–(12).

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?