Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

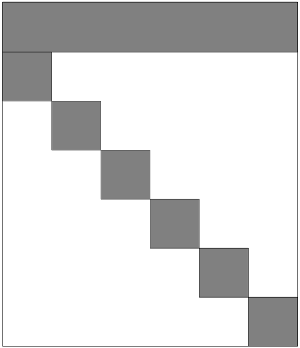
PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

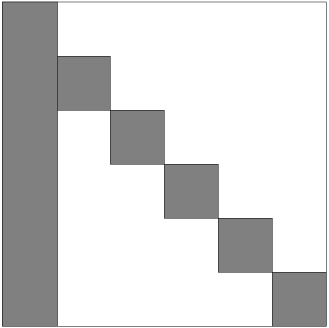
Tópico 12.1: Introdução à Decomposição de Dantzig-Wolfe

Objetivos deste tópico

- Estudar os conceitos básico da decomposição de Dantzig-Wolfe e conhecer suas aplicações;
- Ver como aplicá-la ao problema de dimensionamento de lotes.

Problemas de grande-porte





Problemas de grande-porte

Decomposição de Dantzig-Wolfe

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& Dx = d, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x, & \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, & \text{(restrições de acoplamento)} \\ & Dx = d, & \text{(estrutura especial)} \\ & x \geq 0, & \end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x, & \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, & \text{(restrições de acoplamento)} \\
& Dx = d, & \text{(estrutura especial)} \\
& x \geq 0, &
\end{aligned}
$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & f(x) = c^T x, & \\
\text{s.a} & Ax = b, & \text{(restrições de acoplamento)} \\
 & x \in \mathcal{X}, & \text{(estrutura especial)}
\end{array}
$$

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx = d, x \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Teorema da Representação/Resolução

Seja $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ um poliedro não-vazio. Sejam $\bar{x}_q$, $q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $\bar{x}_r$, $r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ se, e somente se, x pode ser escrito como

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,$$

$$\text{com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1;\ \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \forall q \in Q, \forall r \in R.$$

Em outras palavras, temos que:

$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r \middle| \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0 \right\}.$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Pelo *Teorema da Representação*, qualquer $x \in \mathcal{X}$ pode ser escrito como uma combinação de pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}$:

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r, \quad \text{com} \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0.$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Pelo *Teorema da Representação*, qualquer $x \in \mathcal{X}$ pode ser escrito como uma combinação de pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}$:

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r, \quad \text{com} \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0.$$

Vamos então substituir essa igualdade no problema original:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x, \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T \left(\sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r \right) \\
\text{s.a} \quad & A \left(\sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r \right) = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \ \mu_r \geq 0, \qquad\qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} \lambda_q (c^T \bar{x}_q) + \sum_{r \in R} \mu_r (c^T \bar{x}_r) \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \lambda_q (A \bar{x}_q) + \sum_{r \in R} \mu_r (A \bar{x}_r) = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \;\; \mu_r \geq 0, \qquad\qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} c_q \lambda_q + \sum_{r \in R} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} a_q \lambda_q + \sum_{r \in R} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} c_q \lambda_q + \sum_{r \in R} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} a_q \lambda_q + \sum_{r \in R} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

- $c_q = c^T \bar{x}_q$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} c_q \lambda_q + \sum_{r \in R} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} a_q \lambda_q + \sum_{r \in R} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \;\; \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}$$

- $c_q = c^T \bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$,

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} c_q \lambda_q + \sum_{r \in R} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} a_q \lambda_q + \sum_{r \in R} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

- $c_q = c^T \bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$, $\forall q \in Q$;

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q\in Q} c_q\lambda_q + \sum_{r\in R} c_r\mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q\in Q} a_q\lambda_q + \sum_{r\in R} a_r\mu_r = b, \\
& \sum_{q\in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0,\ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}$$

- $c_q = c^T\bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$, $\forall q \in Q$;
- $c_r = c^T\bar{x}_r$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} c_q \lambda_q + \sum_{r \in R} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} a_q \lambda_q + \sum_{r \in R} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

- $c_q = c^T \bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$, $\forall q \in Q$;
- $c_r = c^T \bar{x}_r$ e $a_r = A\bar{x}_r$,

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} c_q \lambda_q + \sum_{r \in R} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} a_q \lambda_q + \sum_{r \in R} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \ \mu_r \geq 0, \qquad\qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

- $c_q = c^T \bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$, $\forall q \in Q$;
- $c_r = c^T \bar{x}_r$ e $a_r = A\bar{x}_r$, $\forall r \in R$.

Decomposição de Dantzig-Wolfe

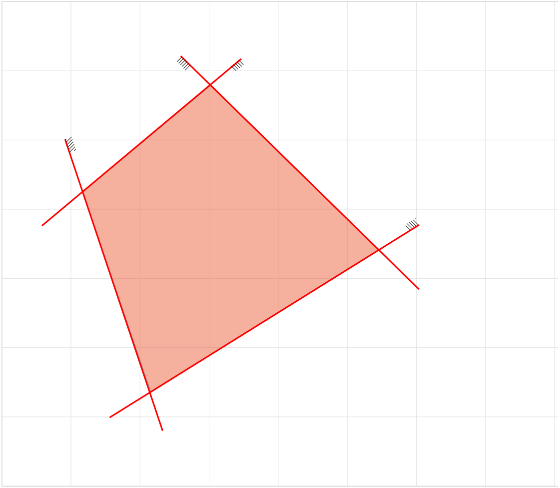
- Com isso, obtemos o seguinte problema equivalente:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} c_q \lambda_q + \sum_{r \in R} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} a_q \lambda_q + \sum_{r \in R} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

- $c_q = c^T \bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$, $\forall q \in Q$;
- $c_r = c^T \bar{x}_r$ e $a_r = A\bar{x}_r$, $\forall r \in R$.
- Chamado de **Problema Mestre**.

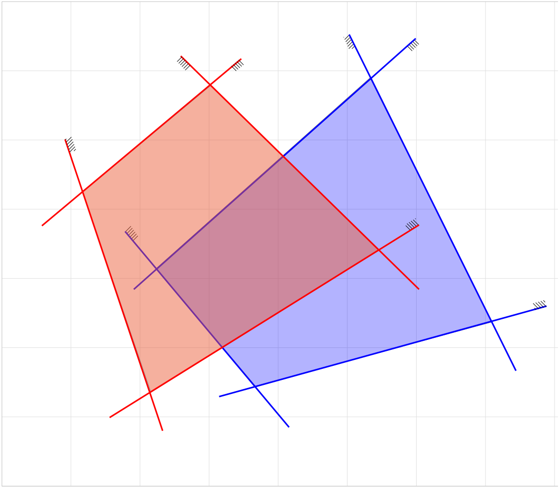
Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Regiões factíveis



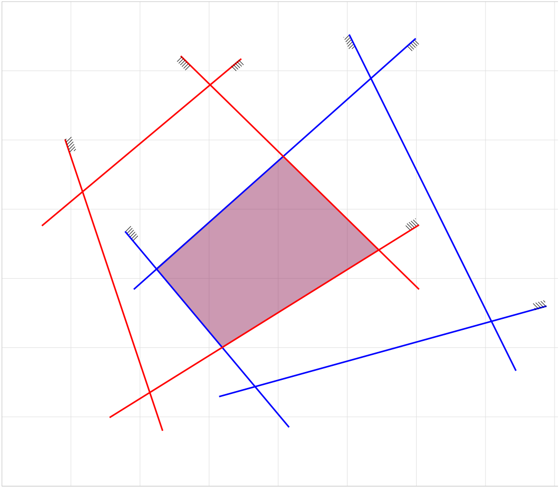
Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Regiões factíveis



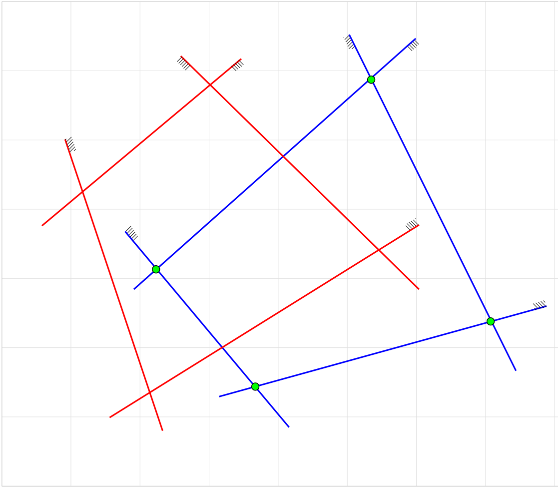
Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Regiões factíveis



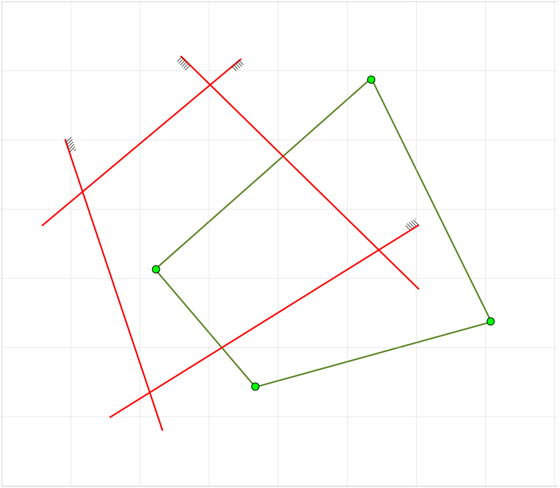
Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Regiões factíveis



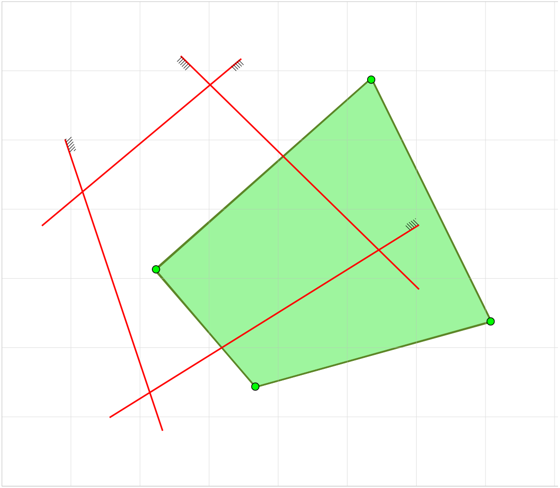
Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Regiões factíveis



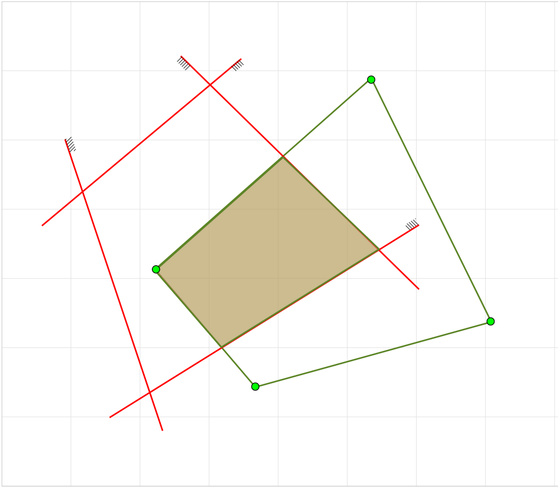
Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Regiões factíveis



Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Regiões factíveis



Decomposição de Dantzig-Wolfe

- **Problema Mestre**:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{q\in Q} c_q\lambda_q + \sum_{r\in R} c_r\mu_r \\ \text{s.a} \quad & \sum_{q\in Q} a_q\lambda_q + \sum_{r\in R} a_r\mu_r = b, \\ & \sum_{q\in Q} \lambda_q = 1, \\ & \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R. \end{aligned}$$

- $c_q = c^T\bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$, $\forall q \in Q$;
- $c_r = c^T\bar{x}_r$ e $a_r = A\bar{x}_r$, $\forall r \in R$.

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente,

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente, o qual possui menos restrições do que o original,

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente, o qual possui menos restrições do que o original, mas um número imenso de variáveis:

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente, o qual possui menos restrições do que o original, mas um número imenso de variáveis: uma para cada ponto extremo e raio extremo do conjunto $\mathcal{X}$;

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente, o qual possui menos restrições do que o original, mas um número imenso de variáveis: uma para cada ponto extremo e raio extremo do conjunto $\mathcal{X}$;
- Qual a vantagem?

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente, o qual possui menos restrições do que o original, mas um número imenso de variáveis: uma para cada ponto extremo e raio extremo do conjunto $\mathcal{X}$;
- Qual a vantagem?
  - Podemos explorar alguma estrutura especial de $\mathcal{X}$;

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente, o qual possui menos restrições do que o original, mas um número imenso de variáveis: uma para cada ponto extremo e raio extremo do conjunto $\mathcal{X}$;
- Qual a vantagem?
  - Podemos explorar alguma estrutura especial de $\mathcal{X}$;
  - $c_j = c^T \bar{x}_j$ e $a_j = A\bar{x}_j$, para $j \in Q$ ou $j \in R$: Os coeficientes de cada variável (custo e coluna) são determinados a partir de pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}$;

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente, o qual possui menos restrições do que o original, mas um número imenso de variáveis: uma para cada ponto extremo e raio extremo do conjunto $\mathcal{X}$;
- Qual a vantagem?
  - Podemos explorar alguma estrutura especial de $\mathcal{X}$;
  - $c_j = c^T\bar{x}_j$ e $a_j = A\bar{x}_j$, para $j \in Q$ ou $j \in R$: Os coeficientes de cada variável (custo e coluna) são determinados a partir de pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}$;
  - Os pontos e raios extremos podem ser obtidos aos poucos.

Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Temos um problema equivalente, o qual possui menos restrições do que o original, mas um número imenso de variáveis: uma para cada ponto extremo e raio extremo do conjunto $\mathcal{X}$;
- Qual a vantagem?
  - Podemos explorar alguma estrutura especial de $\mathcal{X}$;
  - $c_j = c^T \bar{x}_j$ e $a_j = A\bar{x}_j$, para $j \in Q$ ou $j \in R$: Os coeficientes de cada variável (custo e coluna) são determinados a partir de pontos extremos e raios extremos de $\mathcal{X}$;
  - Os pontos e raios extremos podem ser obtidos aos poucos. Mas como?

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Formulação compacta

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t, && t = 1,\dots,T,\\
& x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, && i = 1,\dots,n; \quad t = 1,\dots,T,\\
& I_{i0} = 0, && i = 1,\dots,n,\\
& x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, && i = 1,\dots,n; \quad t = 1,\dots,T.
\end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Formulação compacta

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t, && t = 1,\ldots,T,\\
& x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, && i = 1,\ldots,n; \quad t = 1,\ldots,T,\\
& I_{i0} = 0, && i = 1,\ldots,n,\\
& x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, && i = 1,\ldots,n; \quad t = 1,\ldots,T.
\end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Decomposição de Dantzig-Wolfe

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it} \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \le b_t, \qquad t = 1, \ldots, T, \\
& (x, I) \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Decomposição de Dantzig-Wolfe

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it} \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t, \qquad t = 1,\ldots,T, \\
& (x, I) \in \mathcal{X}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} = \{\ (x, I) \quad | \quad & x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, \quad i = 1,\ldots,n; \quad t = 1,\ldots,T, \\
& I_{i0} = 0, \qquad i = 1,\ldots,n, \\
& x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,n; \quad t = 1,\ldots,T\}
\end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Sabemos que qualquer $(x, I) \in \mathcal{X}$ pode ser escrito como:

$$(x, I) = \sum_{q \in Q} \lambda_q (\bar{x}_q, \bar{I}_q) + \sum_{r \in R} \mu_r (\bar{x}_r, \bar{I}_r),$$

$$\sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0.$$

sendo $(\bar{x}_q, \bar{I}_q), q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $(\bar{x}_r, \bar{I}_r), r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Decomposição de Dantzig-Wolfe

- Sabemos que qualquer $(x, I) \in \mathcal{X}$ pode ser escrito como:

$$(x, I) = \sum_{q \in Q} \lambda_q (\bar{x}_q, \bar{I}_q) + \sum_{r \in R} \mu_r (\bar{x}_r, \bar{I}_r),$$

$$\sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0.$$

sendo $(\bar{x}_q, \bar{I}_q), q \in Q$, os pontos extremos de $\mathcal{X}$ e $(\bar{x}_r, \bar{I}_r), r \in R$, os raios extremos de $\mathcal{X}$.

- Substituindo no problema anterior, obtemos...

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Decomposição de Dantzig-Wolfe

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}\left(\sum_{q\in Q}\lambda_q \bar{x}_{qit} + \sum_{r\in R}\mu_r \bar{x}_{rit}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}\left(\sum_{q\in Q}\lambda_q \bar{I}_{qit} + \sum_{r\in R}\mu_r \bar{I}_{rit}\right)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{q\in Q}\lambda_q \bar{x}_{qit} + \sum_{r\in R}\mu_r \bar{x}_{rit}\right) \leq b_t, \qquad t = 1,\ldots,T,$$

$$\sum_{q\in Q}\lambda_q = 1,$$

$$\lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0.$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Formulação extensiva

$$\min \quad \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (c_{it} \bar{x}_{qit} + h_{it} \bar{I}_{qit}) \lambda_q + \sum_{r \in R} \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (c_{it} \bar{x}_{rit} + h_{it} \bar{I}_{rit}) \mu_r$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{q \in Q} \sum_{i=1}^{n} (a_i \bar{x}_{qit}) \lambda_q + \sum_{r \in R} \sum_{i=1}^{n} (a_i \bar{x}_{rit}) \mu_r \leq b_t, \qquad t = 1, \ldots, T,$$

$$\sum_{q \in Q} \lambda_q = 1,$$

$$\lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0.$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Explorando a estrutura em blocos

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it} && \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t, && t = 1, \dots, T, \\
& (x, I) \in \mathcal{X}^i, && i = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Explorando a estrutura em blocos

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \leq b_t, && t = 1, \ldots, T, \\ & (x, I) \in \mathcal{X}^i, && i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^i = \{ \ (x_i, I_i) \quad | \quad & x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, \quad t = 1, \ldots, T, \\ & I_{i0} = 0, \\ & x_{it} \geq 0, I_{it} \geq 0, \qquad t = 1, \ldots, T\} \end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Explorando a estrutura em blocos

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}x_{it} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}I_{it} & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} \le b_t, & t = 1,\dots,T, \\
& (x, I) \in \mathcal{X}^i, & i = 1,\dots,n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X}^i = \{\ (x_i, I_i) \quad | \quad & x_{it} + I_{i,t-1} = d_{it} + I_{it}, \quad t = 1,\dots,T, \\
& I_{i0} = 0, \\
& x_{it} \ge 0, I_{it} \ge 0, \qquad t = 1,\dots,T\}
\end{aligned}
$$

Notação: $(x_i, I_i) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iT}, I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{iT})$.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Explorando a estrutura em blocos

- Qualquer $(x_i, I_i) \in \mathcal{X}^i$ pode ser escrito como:

$$(x_i, I_i) = \sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i (\bar{x}_{qi}, \bar{I}_{qi}) + \sum_{r \in R^i} \mu_r^i (\bar{x}_{ri}, \bar{I}_{ri}),$$

$$\sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i = 1, \lambda_q^i \geq 0, \mu_r^i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

sendo $(\bar{x}_{qi}, \bar{I}_{qi})$, $q \in Q^i$, os pontos extremos de $\mathcal{X}^i$ e $(\bar{x}_{ri}, \bar{I}_{ri})$, $r \in R^i$, os raios extremos de $\mathcal{X}^i$.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Explorando a estrutura em blocos

- Qualquer $(x_i, I_i) \in \mathcal{X}^i$ pode ser escrito como:

$$(x_i, I_i) = \sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i (\bar{x}_{qi}, \bar{I}_{qi}) + \sum_{r \in R^i} \mu_r^i (\bar{x}_{ri}, \bar{I}_{ri}),$$

$$\sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i = 1, \lambda_q^i \geq 0, \mu_r^i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

  sendo $(\bar{x}_{qi}, \bar{I}_{qi})$, $q \in Q^i$, os pontos extremos de $\mathcal{X}^i$ e $(\bar{x}_{ri}, \bar{I}_{ri})$, $r \in R^i$, os raios extremos de $\mathcal{X}^i$.

- Substituindo no problema anterior, obtemos...

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Explorando a estrutura em blocos

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} c_{it}\left(\sum_{q\in Q^i}\lambda_q^i \bar{x}_{qit} + \sum_{r\in R^i}\mu_r^i \bar{x}_{rit}\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} h_{it}\left(\sum_{q\in Q^i}\lambda_q \bar{I}_{qit} + \sum_{r\in R^i}\mu_r^i \bar{I}_{rit}\right)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{q\in Q^i}\lambda_q^i \bar{x}_{qit} + \sum_{r\in R^i}\mu_r^i \bar{x}_{rit}\right) \leq b_t, \qquad t = 1,\ldots,T,$$

$$\sum_{q\in Q^i}\lambda_q^i = 1, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

$$\lambda_q^i \geq 0, \mu_r^i \geq 0, \qquad i = 1,\ldots,n,\ q\in Q_i,\ r\in R_i.$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Formulação extensiva explorando a estrutura em blocos

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{q\in Q^i}\sum_{t=1}^{T}(c_{it}\bar{x}_{qit}+h_{it}\bar{I}_{qit})\lambda_q^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r\in R^i}\sum_{t=1}^{T}(c_{it}\bar{x}_{rit}+h_{it}\bar{I}_{rit})\mu_r^i$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{q\in Q^i}(a_i\bar{x}_{qit})\lambda_q^i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r\in R}(a_i\bar{x}_{rit})\mu_r^i \le b_t, \qquad t=1,\dots,T,$$

$$\sum_{q\in Q^i}\lambda_q^i = 1, \qquad i=1,\dots,n,$$

$$\lambda_q^i \ge 0, \mu_r^i \ge 0, \qquad i=1,\dots,n,\ q\in Q_i,\ r\in R_i.$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Formulação extensiva explorando a estrutura em blocos

Assumindo que os conjuntos $\mathcal{X}^i$ sejam limitados:

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Formulação extensiva explorando a estrutura em blocos

Assumindo que os conjuntos $\mathcal{X}^i$ sejam limitados:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q \in Q^i} \sum_{t=1}^{T} (c_{it}\bar{x}_{qit} + h_{it}\bar{I}_{qit})\lambda_q^i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q \in Q^i} (a_i \bar{x}_{qit})\lambda_q^i \leq b_t, && t = 1, \ldots, T, \\
& \sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i = 1, && i = 1, \ldots, n, \\
& \lambda_q^i \geq 0, && i = 1, \ldots, n, \ q \in Q_i,
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Formulação extensiva explorando a estrutura em blocos

Assumindo que os conjuntos $\mathcal{X}^i$ sejam limitados:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q \in Q^i} \sum_{t=1}^{T} (c_{it}\bar{x}_{qit} + h_{it}\bar{I}_{qit})\lambda_q^i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q \in Q^i} (a_i \bar{x}_{qit})\lambda_q^i \leq b_t, && t = 1, \ldots, T, \\
& \sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i = 1, && i = 1, \ldots, n, \\
& \lambda_q^i \geq 0, && i = 1, \ldots, n, \ q \in Q_i,
\end{aligned}$$

podemos observar que cada coluna corresponde a um plano de produção/ estoque completo de um dado item i.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Formulação extensiva explorando a estrutura em blocos

Assumindo que os conjuntos $\mathcal{X}^i$ sejam limitados:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q \in Q^i} \sum_{t=1}^{T} (c_{it}\bar{x}_{qit} + h_{it}\bar{I}_{qit})\lambda_q^i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q \in Q^i} (a_i \bar{x}_{qit})\lambda_q^i \leq b_t, && t = 1, \ldots, T, \\
& \sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i = 1, && i = 1, \ldots, n, \\
& \lambda_q^i \geq 0, && i = 1, \ldots, n, \ q \in Q_i,
\end{aligned}
$$

podemos observar que cada coluna corresponde a um plano de produção/ estoque completo de um dado item i. Assim, queremos determinar qual a proporção ótima de cada plano.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exercício

Uma fábrica de refrigerantes produz dois tipos de bebidas, por meio de um único tanque. Para processar 1000 litros da bebida 1 são necessárias 100 horas do tanque, enquanto para 1000 litros da bebida 2, são necessárias 80 horas. A disponibilidade do tanque para a fabricação destas bebidas nos próximos 3 meses é de 240, 320 e 200 horas. O departamento de vendas fez uma previsão de demanda para os próximos 3 meses. A demanda de cada bebida e os possíveis custos envolvidos são dados na tabela abaixo. Deseja-se determinar quanto produzir e quanto estocar de cada bebida em cada período.

	Bebida 1			Bebida 2		
Período	1	2	3	1	2	3
Demanda (L)	900	1800	1800	400	600	800
Custo prod (R$/L)	1.0	1.5	2.0	0.5	0.5	0.9
Custo estoc (R$/L)	0.5	0.25	—	0.25	0.25	—

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exercício: formulação compacta

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} \\
& +0.9x_{23} + 0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\
& x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \;\; I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exercício: estrutura

$$
\begin{array}{cccccccccccccl}
0.1x_{11} & & & & & & 0.08x_{21} & & & & & & & \leq 240 \\
& 0.1x_{12} & & & & & & 0.08x_{22} & & & & & & \leq 320 \\
& & 0.1x_{13} & & & & & & 0.08x_{23} & & & & & \leq 200 \\
x_{11} & & & I_{10}-I_{11} & & & & & & & & & & = 900 \\
& x_{12} & & & I_{11}-I_{12} & & & & & & & & & = 1800 \\
& & x_{13} & & & I_{12}-I_{13} & & & & & & & & = 1800 \\
& & & & & & x_{21} & & & I_{20}-I_{21} & & & & = 400 \\
& & & & & & & x_{22} & & & I_{21}-I_{22} & & & = 600 \\
& & & & & & & & x_{23} & & & I_{22}-I_{23} & & = 800
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exercício: estrutura

$$
\begin{array}{cccc|cccc|l}
0.1\,x_{11} & & & & 0.08\,x_{21} & & & & \leq 240 \\
& 0.1\,x_{12} & & & & 0.08\,x_{22} & & & \leq 320 \\
& & 0.1\,x_{13} & & & & 0.08\,x_{23} & & \leq 200 \\
\hline
x_{11} & & & I_{10}-I_{11} & & & & & = 900 \\
& x_{12} & & I_{11}-I_{12} & & & & & = 1800 \\
& & x_{13} & I_{12}-I_{13} & & & & & = 1800 \\
\hline
& & & & x_{21} & & & I_{20}-I_{21} & = 400 \\
& & & & & x_{22} & & I_{21}-I_{22} & = 600 \\
& & & & & & x_{23} & I_{22}-I_{23} & = 800
\end{array}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exercício

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& \quad +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\
& x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\
& x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\
& x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\
& x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\
& x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\
& x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\
& I_{10} = 0, \; I_{20} = 0 \\
& x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0 \\
& I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{23} \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Exercício

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1.0x_{11} + 1.5x_{12} + 2.0x_{13} + 0.5x_{21} + 0.5x_{22} + 0.9x_{23} \\
& +0.5I_{11} + 0.25I_{12} + 0.25I_{21} + 0.25I_{22} \\
\text{s.a} \quad & 0.1x_{11} + 0.08x_{21} \leq 240 \\
& 0.1x_{12} + 0.08x_{22} \leq 320 \\
& 0.1x_{13} + 0.08x_{23} \leq 200 \\
& (x_1, I_1) \in \mathcal{X}^1, \ (x_2, I_2) \in \mathcal{X}^2
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{X}^1 = \left\{ \begin{array}{c} x_{11} + I_{10} - I_{11} = 900 \\ x_{12} + I_{11} - I_{12} = 1800 \\ x_{13} + I_{12} - I_{13} = 1800 \\ I_{10} = 0 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \\ I_{11}, I_{12}, I_{13} \geq 0 \end{array} \right\}, \quad \mathcal{X}^2 = \left\{ \begin{array}{c} x_{21} + I_{20} - I_{21} = 400 \\ x_{22} + I_{21} - I_{22} = 600 \\ x_{23} + I_{22} - I_{23} = 800 \\ I_{20} = 0, \\ x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \\ I_{21}, I_{22}, I_{23} \geq 0 \end{array} \right\}.
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Pelo Teorema da Representação

- Qualquer $(x_i, I_i) \in \mathcal{X}^i$ pode ser escrito como:

$$(x_i, I_i) = \sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i (\bar{x}_{qi}, \bar{I}_{qi}) + \sum_{r \in R^i} \mu_r^i (\bar{x}_{ri}, \bar{I}_{ri}),$$

$$\sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i = 1, \lambda_q^i \geq 0, \mu_r^i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

sendo $(\bar{x}_{qi}, \bar{I}_{qi})$, $q \in Q^i$, os pontos extremos de $\mathcal{X}^i$ e $(\bar{x}_{ri}, \bar{I}_{ri})$, $r \in R^i$, os raios extremos de $\mathcal{X}^i$;

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Pelo Teorema da Representação

- Qualquer $(x_i, I_i) \in \mathcal{X}^i$ pode ser escrito como:

$$(x_i, I_i) = \sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i (\bar{x}_{qi}, \bar{I}_{qi}) + \sum_{r \in R^i} \mu_r^i (\bar{x}_{ri}, \bar{I}_{ri}),$$

$$\sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i = 1, \lambda_q^i \geq 0, \mu_r^i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

sendo $(\bar{x}_{qi}, \bar{I}_{qi})$, $q \in Q^i$, os pontos extremos de $\mathcal{X}^i$ e $(\bar{x}_{ri}, \bar{I}_{ri})$, $r \in R^i$, os raios extremos de $\mathcal{X}^i$;

- Os subproblemas são limitados, portanto temos apenas pontos extremos.

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q \in Q^i} \sum_{t=1}^{T} (c_{it}\bar{x}_{qit} + h_{it}\bar{I}_{qit})\lambda_q^i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{q \in Q^i} (a_i \bar{x}_{qit})\lambda_q^i \leq b_t, && t = 1, \ldots, T, \\
& \sum_{q \in Q^i} \lambda_q^i = 1, && i = 1, \ldots, n, \\
& \lambda_q^i \geq 0, && i = 1, \ldots, n, \ q \in Q_i.
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q^1} (1.0\bar{x}_{q11} + 1.5\bar{x}_{q12} + 2.0\bar{x}_{q13} + 0.5\bar{I}_{q11} + 0.25\bar{I}_{q12})\lambda_q^1 \\
& + \sum_{q \in Q^2} (0.5x_{q21} + 0.5x_{q22} + 0.9x_{q23} + 0.25I_{q21} + 0.25I_{q22})\lambda_q^2 \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q^1} (0.1\bar{x}_{q11})\lambda_q^1 + \sum_{q \in Q^2} (0.08\bar{x}_{q21})\lambda_q^2 \leq 240 \\
& \sum_{q \in Q^1} (0.1\bar{x}_{q12})\lambda_q^1 + \sum_{q \in Q^2} (0.08\bar{x}_{q22})\lambda_q^2 \leq 320 \\
& \sum_{q \in Q^1} (0.1\bar{x}_{q13})\lambda_q^1 + \sum_{q \in Q^2} (0.08\bar{x}_{q23})\lambda_q^2 \leq 200 \\
& \sum_{q \in Q^1} \lambda_q^1 = 1, \\
& \sum_{q \in Q^2} \lambda_q^2 = 1, \\
& \lambda_q^1, \lambda_q^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

- Considere os seguintes pontos extremos dos conjuntos $\mathcal{X}^1$ e $\mathcal{X}^2$, respect.:

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

- Considere os seguintes pontos extremos dos conjuntos $\mathcal{X}^1$ e $\mathcal{X}^2$, respect.:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

- Considere os seguintes pontos extremos dos conjuntos $\mathcal{X}^1$ e $\mathcal{X}^2$, respect.:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

- Considere os seguintes pontos extremos dos conjuntos $\mathcal{X}^1$ e $\mathcal{X}^2$, respect.:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \\ \bar{I}_{11} \\ \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 0 \\ 0 \\ 3600 \\ 1800 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \\ \bar{I}_{21} \\ \bar{I}_{22} \\ \bar{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 1400 \\ 0 \\ 0 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Substituindo esses pontos no problema mestre...

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q\in Q^1} (1.0\bar{x}_{q11} + 1.5\bar{x}_{q12} + 2.0\bar{x}_{q13} + 0.5\bar{I}_{q11} + 0.25\bar{I}_{q12})\lambda_q^1 \\
& + \sum_{q\in Q^2} (0.5x_{q21} + 0.5x_{q22} + 0.9x_{q23} + 0.25I_{q21} + 0.25I_{q22})\lambda_q^2 \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q\in Q^1} (0.1\bar{x}_{q11})\lambda_q^1 + \sum_{q\in Q^2} (0.08\bar{x}_{q21})\lambda_q^2 \leq 240 \\
& \sum_{q\in Q^1} (0.1\bar{x}_{q12})\lambda_q^1 + \sum_{q\in Q^2} (0.08\bar{x}_{q22})\lambda_q^2 \leq 320 \\
& \sum_{q\in Q^1} (0.1\bar{x}_{q13})\lambda_q^1 + \sum_{q\in Q^2} (0.08\bar{x}_{q23})\lambda_q^2 \leq 200 \\
& \sum_{q\in Q^1} \lambda_q^1 = 1, \\
& \sum_{q\in Q^2} \lambda_q^2 = 1, \\
& \lambda_q^1, \lambda_q^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & (1.0(4500) + 1.5(0) + 2.0(0) + 0.5(3600) + 0.25(1800))\lambda_1^1 \\
& +(0.5(400) + 0.5(1400) + 0.9(0) + 0.25(0) + 0.25(800))\lambda_1^2 + \dots \\
\text{s.a} \quad & 0.1(4500)\lambda_1^1 + 0.08(400)\lambda_1^2 + \dots \leq 240 \\
& 0.1(0)\lambda_1^1 + 0.08(1400)\lambda_1^2 + \dots \leq 320 \\
& 0.1(0)\lambda_1^1 + 0.08(0)\lambda_1^2 + \dots \leq 200 \\
& \lambda_1^1 + \dots = 1, \\
& \lambda_1^2 + \dots = 1, \\
& \lambda_1^1, \lambda_1^2, + \dots \geq 0.
\end{aligned}$$

Problema de dimensionamento de lotes com capacidade

▷ Problema mestre explorando a estrutura em blocos

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 6750\lambda_1^1 + 1100\lambda_1^2 + \dots \\
\text{s.a} & 450\lambda_1^1 + 32\lambda_1^2 + \dots \leq 240 \\
& 0\lambda_1^1 + 112\lambda_1^2 + \dots \leq 320 \\
& 0\lambda_1^1 + 0\lambda_1^2 + \dots \leq 200 \\
& \lambda_1^1 + \dots = 1, \\
& \lambda_1^2 + \dots = 1, \\
& \lambda_1^1, \lambda_1^2, \dots \geq 0.
\end{array}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Dantzig and Wolfe, Operations Research 8, 1960

DECOMPOSITION PRINCIPLE FOR LINEAR PROGRAMS†

George B. Dantzig and Philip Wolfe

The Rand Corporation, Santa Monica, California

(Received November 24, 1959)

A technique is presented for the decomposition of a linear program that permits the problem to be solved by alternate solutions of linear sub-programs representing its several parts and a coordinating program that is obtained from the parts by linear transformations. The coordinating program generates at each cycle new objective forms for each part, and each part generates in turn (from its optimal basic feasible solutions) new activities (columns) for the interconnecting program. Viewed as an instance of a 'generalized programming problem' whose columns are drawn freely from given convex sets, such a problem can be studied by an appropriate generalization of the duality theorem for linear programming, which permits a sharp distinction to be made between those constraints that pertain only to a part of the problem and those that connect its parts. This leads to a generalization of the Simplex Algorithm, for which the decomposition procedure becomes a special case. Besides holding promise for the efficient computation of large-scale systems, the principle yields a certain rationale for the 'decentralized decision process' in the theory of the firm. Formally the prices generated by the coordinating program cause the manager of each part to look for a 'pure' sub-program analogue of pure strategy in game theory, which he proposes to the coordinator as best he can do. The coordinator finds the optimum 'mix' of pure sub-programs (using new proposals and earlier ones) consistent with over-all demands and supply, and thereby generates new prices that again generates new proposals by each of the parts, etc. The iterative process is finite.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?