Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 12.2: O método de geração de colunas

Objetivos deste tópico

- Estudar e aplicar o método de geração de colunas;
- Fixar os conceitos de decomposição Dantzig-Wolfe e do método de geração de colunas por meio de exercícios.

Método de Geração de Colunas

- **Problema Mestre (PM):**

$$
\begin{aligned}
z_{PM} = \text{min} \quad & \sum_{q \in Q} c_q \lambda_q + \sum_{r \in R} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} a_q \lambda_q + \sum_{r \in R} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \;\; \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \forall r \in R.
\end{aligned}
$$

- $c_q = c^T \bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$, $\forall q \in Q$;
- $c_r = c^T \bar{x}_r$ e $a_r = A\bar{x}_r$, $\forall r \in R$.

Método de Geração de Colunas

- **Problema Mestre Restrito (PMR):**

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \min \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

- $c_q = c^T \bar{x}_q$ e $a_q = A\bar{x}_q$, $\forall q \in \tilde{Q}$;
- $c_r = c^T \bar{x}_r$ e $a_r = A\bar{x}_r$, $\forall r \in \tilde{R}$;
- $\tilde{Q} \subset Q$ e $\tilde{R} \subset R$.

Método de Geração de Colunas

Vamos então gerar essas colunas/variáveis aos poucos...

Método de Geração de Colunas

Vamos então gerar essas colunas/variáveis aos poucos...

- Precisamos mesmo gerar todos os pontos/raios extremos?

Método de Geração de Colunas

Vamos então gerar essas colunas/variáveis aos poucos...

- Precisamos mesmo gerar todos os pontos/raios extremos?
- Todos serão usados em uma solução ótima?

Método de Geração de Colunas

Vamos então gerar essas colunas/variáveis aos poucos...

- Precisamos mesmo gerar todos os pontos/raios extremos?
- Todos serão usados em uma solução ótima?
- Como saber se os que já foram gerados são suficientes?

Método de Geração de Colunas

Vamos então gerar essas colunas/variáveis aos poucos...

- Precisamos mesmo gerar todos os pontos/raios extremos?
- Todos serão usados em uma solução ótima?
- Como saber se os que já foram gerados são suficientes?
  (*i.e.* se a solução ótima do PMR também é ótima para o PM)

Método de Geração de Colunas

Vamos então gerar essas colunas/variáveis aos poucos...

- Precisamos mesmo gerar todos os pontos/raios extremos?
- Todos serão usados em uma solução ótima?
- Como saber se os que já foram gerados são suficientes?
  (*i.e.* se a solução ótima do PMR também é ótima para o PM)
- Como gerar novos pontos/raios extremos que ainda não estejam no PMR mas que podem ajudar a reduzir o valor da função objetivo?

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \text{min} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, \qquad \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \min \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, && (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, && \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \min \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, && (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, && (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \;\; \mu_r \geq 0, && \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \text{min} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, && (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, && (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, && \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Custo reduzido de uma variável λ_q:

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \min \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, && (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, && (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, && \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Custo reduzido de uma variável λ_q: $c_q - \bar{p}^T a_q - \bar{v}$;

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \text{min} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, & (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, & (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, & \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Custo reduzido de uma variável λ_q: $c_q - \bar{p}^T a_q - \bar{v}$;

Para uma variável μ_r, temos: $c_r - \bar{p}^T a_r$.

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \text{min} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, & (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, & (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \;\; \mu_r \geq 0, & \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Custo reduzido de uma variável λ_q: $c^T \bar{x}_q - \bar{p}^T A \bar{x}_q - \bar{v}$;

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \text{min} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, && (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, && (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, && \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Custo reduzido de uma variável λ_q: $c^T \bar{x}_q - \bar{p}^T A \bar{x}_q - \bar{v}$;

Para uma variável μ_r, temos: $c^T \bar{x}_r - \bar{p}^T A \bar{x}_r$.

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \text{min} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, & (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, & (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, & \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Menor custo reduzido de uma variável λ_q:

$$\min\{c^T x - \bar{p}^T A x - \bar{v} \mid x \in \mathcal{X}\};$$

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \text{min} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, & (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, & (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, & \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Menor custo reduzido de uma variável λ_q:

$$\min\{c^T x - \bar{p}^T A x - \bar{v} \mid x \in \mathcal{X}\};$$

Para uma variável μ_r, temos: $\min\{c^T x - \bar{p}^T A x \mid x \in \mathcal{X}\}$.

Método de Geração de Colunas

- Como saber se ainda existem colunas pra serem geradas?

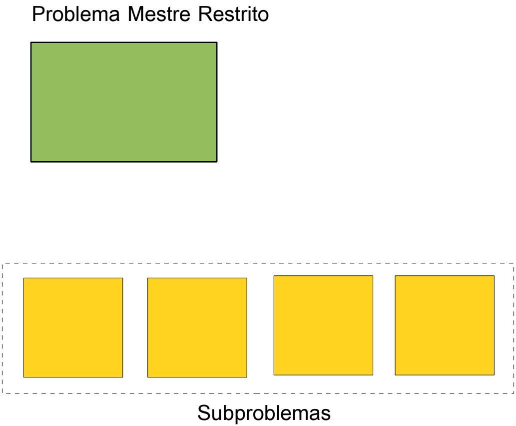
$$
\begin{aligned}
z_{PMR} = \text{min} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} c_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} c_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in \tilde{Q}} a_q \lambda_q + \sum_{r \in \tilde{R}} a_r \mu_r = b, && (\bar{p}) \\
& \sum_{q \in \tilde{Q}} \lambda_q = 1, && (\bar{v}) \\
& \lambda_q \geq 0, \ \mu_r \geq 0, && \forall q \in \tilde{Q}, \forall r \in \tilde{R}.
\end{aligned}
$$

Menor custo reduzido de uma variável λ_q:

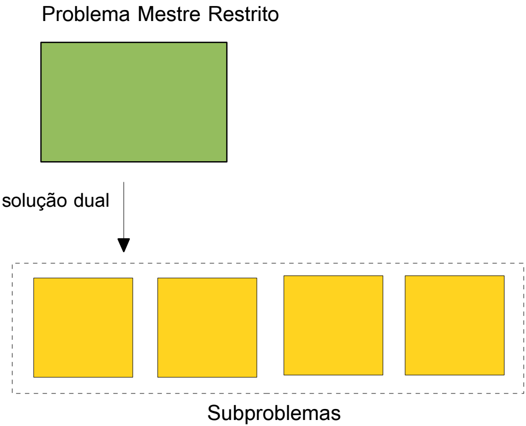
$$\min\{c^T x - \bar{p}^T A x \mid x \in \mathcal{X}\} - \bar{v};$$

Para uma variável μ_r, temos: $\min\{c^T x - \bar{p}^T A x \mid x \in \mathcal{X}\}$.

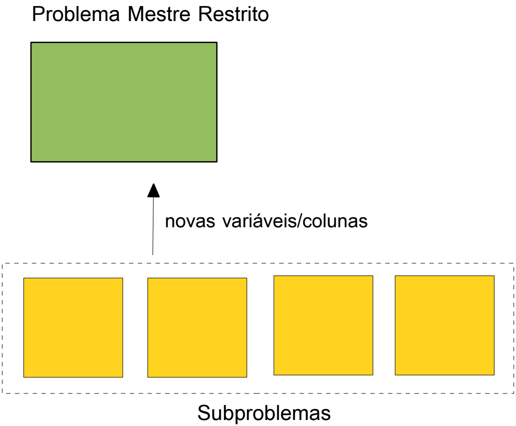
Método de Geração de Colunas



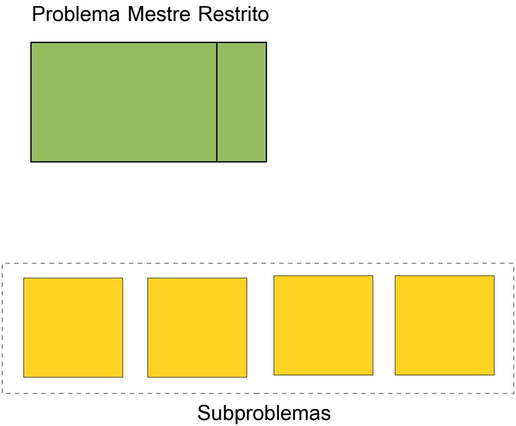
Método de Geração de Colunas



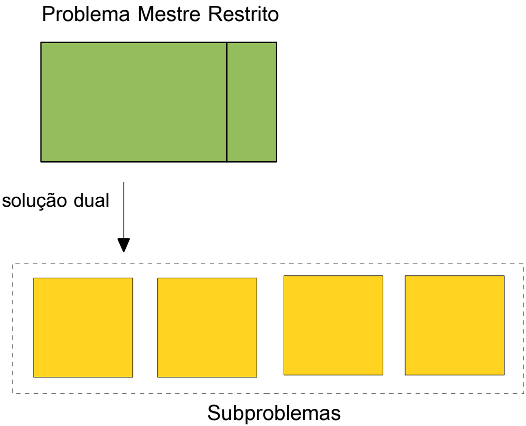
Método de Geração de Colunas



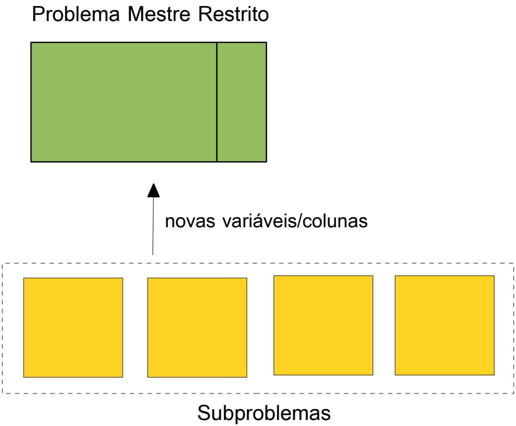
Método de Geração de Colunas



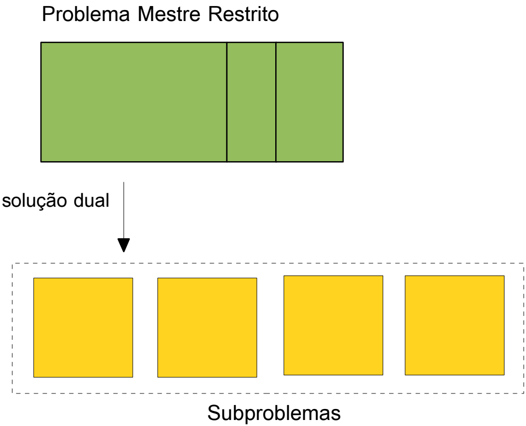
Método de Geração de Colunas



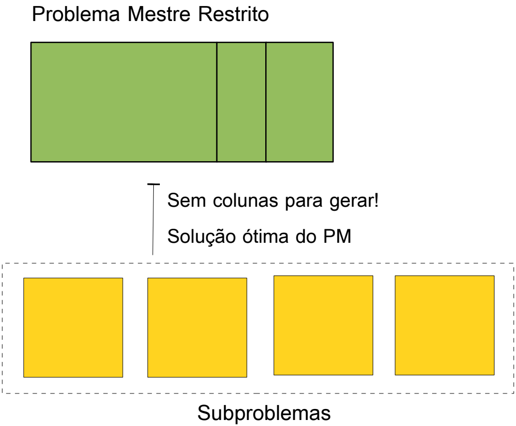
Método de Geração de Colunas



Método de Geração de Colunas



Método de Geração de Colunas



Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível:

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível: de fato, temos uma solução particular do PM com $\lambda_q = 0$ para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $\mu_r = 0$ para $r \in R \setminus \tilde{R}$;

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível: de fato, temos uma solução particular do PM com $\lambda_q = 0$ para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $\mu_r = 0$ para $r \in R \setminus \tilde{R}$;
- Assim, z_{PMR} é um limitante

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível: de fato, temos uma solução particular do PM com $\lambda_q = 0$ para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $\mu_r = 0$ para $r \in R \setminus \tilde{R}$;
- Assim, z_{PMR} é um limitante superior para z_{PM}, i.e. $z_{PMR} \geq z_{PM}$;

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível: de fato, temos uma solução particular do PM com $\lambda_q = 0$ para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $\mu_r = 0$ para $r \in R \setminus \tilde{R}$;
- Assim, z_{PMR} é um limitante superior para z_{PM}, i.e. $z_{PMR} \geq z_{PM}$;
- Na solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR, o custo reduzido das variáveis λ_q e μ_r para $q \in \tilde{Q}$ e $r \in \tilde{R}$ é

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível: de fato, temos uma solução particular do PM com $\lambda_q = 0$ para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $\mu_r = 0$ para $r \in R \setminus \tilde{R}$;
- Assim, z_{PMR} é um limitante superior para z_{PM}, i.e. $z_{PMR} \geq z_{PM}$;
- Na solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR, o custo reduzido das variáveis λ_q e μ_r para $q \in \tilde{Q}$ e $r \in \tilde{R}$ é maior ou igual a zero:

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível: de fato, temos uma solução particular do PM com $\lambda_q = 0$ para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $\mu_r = 0$ para $r \in R \setminus \tilde{R}$;
- Assim, z_{PMR} é um limitante superior para z_{PM}, i.e. $z_{PMR} \geq z_{PM}$;
- Na solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR, o custo reduzido das variáveis λ_q e μ_r para $q \in \tilde{Q}$ e $r \in \tilde{R}$ é maior ou igual a zero: $\bar{s}_q = c_q - \bar{p}^T a_q - \bar{v} \geq 0$, $\forall q \in \tilde{Q}$;

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível: de fato, temos uma solução particular do PM com $\lambda_q = 0$ para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $\mu_r = 0$ para $r \in R \setminus \tilde{R}$;
- Assim, z_{PMR} é um limitante superior para z_{PM}, i.e. $z_{PMR} \geq z_{PM}$;
- Na solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR, o custo reduzido das variáveis λ_q e μ_r para $q \in \tilde{Q}$ e $r \in \tilde{R}$ é maior ou igual a zero: $\bar{s}_q = c_q - \bar{p}^T a_q - \bar{v} \geq 0$, $\forall q \in \tilde{Q}$; $\bar{s}_r = c_r - \bar{p}^T a_r \geq 0$, $\forall r \in \tilde{R}$;

Método de Geração de Colunas

- Problema Mestre Restrito: subconjunto das variáveis do Problema Mestre, *i.e.*, um subconjunto de pontos/raios extremos de $\mathcal{X}$;
- Para o PM, uma solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR é uma solução factível: de fato, temos uma solução particular do PM com $\lambda_q = 0$ para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $\mu_r = 0$ para $r \in R \setminus \tilde{R}$;
- Assim, z_{PMR} é um limitante superior para z_{PM}, i.e. $z_{PMR} \geq z_{PM}$;
- Na solução ótima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ do PMR, o custo reduzido das variáveis λ_q e μ_r para $q \in \tilde{Q}$ e $r \in \tilde{R}$ é maior ou igual a zero: $\bar{s}_q = c_q - \bar{p}^T a_q - \bar{v} \geq 0$, $\forall q \in \tilde{Q}$; $\bar{s}_r = c_r - \bar{p}^T a_r \geq 0$, $\forall r \in \tilde{R}$;
- Como saber o custo reduzido das variáveis que não estão no PMR? (λ_q e μ_r para $q \in Q \setminus \tilde{Q}$ e $r \in R \setminus \tilde{R}$)

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$.

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$,

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$, então $\bar{x}_q$ não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$).

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$, então $\bar{x}_q$ não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR.

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$, então $\bar{x}_q$ não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos q a $\tilde{Q}$,

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$, então $\bar{x}_q$ não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos q a $\tilde{Q}$, resultando em uma nova coluna:

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$, então $\bar{x}_q$ não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos q a $\tilde{Q}$, resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^T \bar{x}_q \\ A\bar{x}_q \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$, então $\bar{x}_q$ não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos q a $\tilde{Q}$, resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^T \bar{x}_q \\ A\bar{x}_q \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ função objetivo} \\ \\ \\ \end{array}$$

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$, então $\bar{x}_q$ não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos q a $\tilde{Q}$, resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^T \bar{x}_q \\ A\bar{x}_q \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ função objetivo} \\ \rightarrow \text{ restrições de acoplamento} \\ \end{array}$$

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso tenha solução ótima, então existe um ponto extremo ótimo $\bar{x}_q$. Se $z_{SP} - \bar{v} < 0$, então $\bar{x}_q$ não está no PMR atual (i.e. $q \in Q \setminus \tilde{Q}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos q a $\tilde{Q}$, resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^T \bar{x}_q \\ A\bar{x}_q \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ função objetivo} \\ \rightarrow \text{ restrições de acoplamento} \\ \rightarrow \text{ restrição de convexidade} \end{array}$$

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado,

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$.

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$. Então, $\bar{x}_r$ não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$).

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$. Então, $\bar{x}_r$ não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR.

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$. Então, $\bar{x}_r$ não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos r a $\tilde{R}$,

Método de Geração de Colunas

- **Subprolema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$. Então, $\bar{x}_r$ não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos r a $\tilde{R}$, resultando em uma nova coluna:

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$. Então, $\bar{x}_r$ não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos r a $\tilde{R}$, resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^T \bar{x}_r \\ A\bar{x}_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$. Então, $\bar{x}_r$ não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos r a $\tilde{R}$, resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^T \bar{x}_r \\ A\bar{x}_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \text{ função objetivo}$$

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$. Então, $\bar{x}_r$ não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos r a $\tilde{R}$, resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^T \bar{x}_r \\ A\bar{x}_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ função objetivo} \\ \rightarrow \text{ restrições de acoplamento} \\ \end{array}$$

Método de Geração de Colunas

- **Subproblema:**

$$z_{SP} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c^T x - \bar{p}^T A x \right\}$$

- Estamos assumindo que o problema original tenha solução;
- Assim, o subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado:
  - Caso seja ilimitado, então existe um raio de descida e, portanto, um raio extremo $\bar{x}_r$. Então, $\bar{x}_r$ não está no PMR atual (i.e. $r \in R \setminus \tilde{R}$). Temos uma variável com custo reduzido negativo para incluir no PMR. Logo, adicionamos r a $\tilde{R}$, resultando em uma nova coluna:

$$\begin{bmatrix} c^T \bar{x}_r \\ A\bar{x}_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ função objetivo} \\ \rightarrow \text{ restrições de acoplamento} \\ \rightarrow \text{ restrição de convexidade} \end{array}$$

Método de Geração de Colunas

- Após inserir a nova variável/coluna, resolvemos o Problema Mestre Restrito resultante, dando início a uma nova iteração;

Método de Geração de Colunas

- Após inserir a nova variável/coluna, resolvemos o Problema Mestre Restrito resultante, dando início a uma nova iteração;
- Quando o método termina?

Método de Geração de Colunas

- Após inserir a nova variável/coluna, resolvemos o Problema Mestre Restrito resultante, dando início a uma nova iteração;
- Quando o método termina?
- Limitante *superior* para z_{PM}:

Método de Geração de Colunas

- Após inserir a nova variável/coluna, resolvemos o Problema Mestre Restrito resultante, dando início a uma nova iteração;
- Quando o método termina?
- Limitante *superior* para z_{PM}: z_{PMR};

Método de Geração de Colunas

- Após inserir a nova variável/coluna, resolvemos o Problema Mestre Restrito resultante, dando início a uma nova iteração;
- Quando o método termina?
- Limitante *superior* para z_{PM}: z_{PMR};
- Limitante *inferior* para z_{PM}:

Método de Geração de Colunas

- Após inserir a nova variável/coluna, resolvemos o Problema Mestre Restrito resultante, dando início a uma nova iteração;
- Quando o método termina?
- Limitante *superior* para z_{PM}: z_{PMR};
- Limitante *inferior* para z_{PM}: $z_{PMR} + (z_{SP} - v)$;

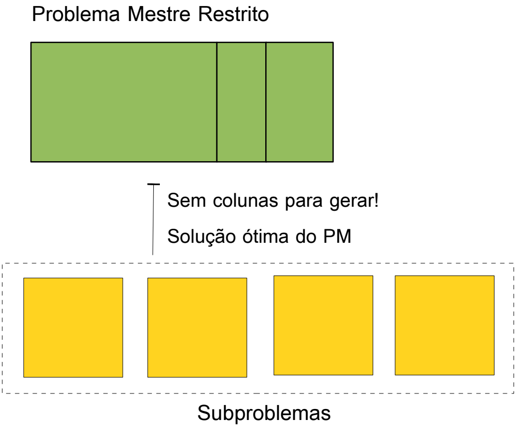
Método de Geração de Colunas

- Após inserir a nova variável/coluna, resolvemos o Problema Mestre Restrito resultante, dando início a uma nova iteração;
- Quando o método termina?
- Limitante *superior* para z_{PM}: z_{PMR};
- Limitante *inferior* para z_{PM}: $z_{PMR} + (z_{SP} - v)$; (para qualquer subproblema com solução ótima);

Método de Geração de Colunas

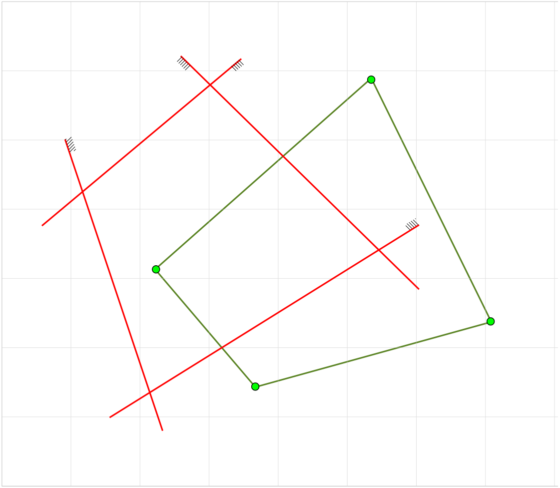
- Após inserir a nova variável/coluna, resolvemos o Problema Mestre Restrito resultante, dando início a uma nova iteração;
- Quando o método termina?
- Limitante *superior* para z_{PM}: z_{PMR};
- Limitante *inferior* para z_{PM}: $z_{PMR} + (z_{SP} - v)$; (para qualquer subproblema com solução ótima);
- Logo, o método é finalizado quando $z_{SP} - v = 0$.

Método de Geração de Colunas



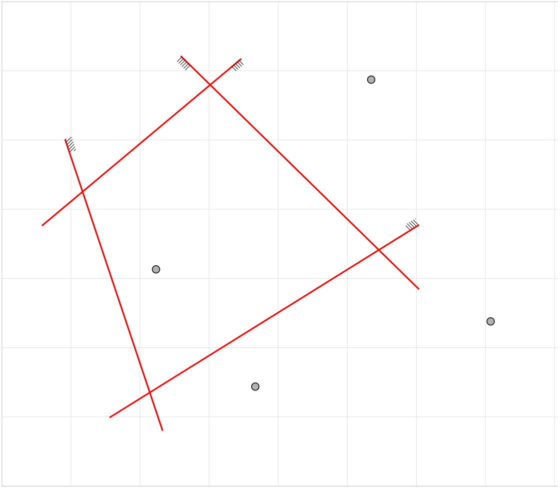
Método de Geração de Colunas

▷ Regiões factíveis



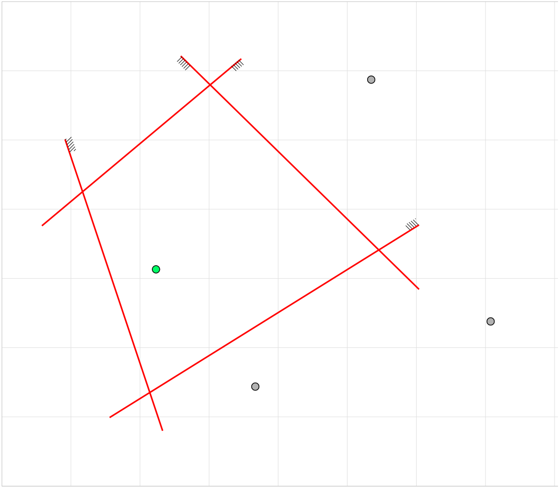
Método de Geração de Colunas

▷ Regiões factíveis



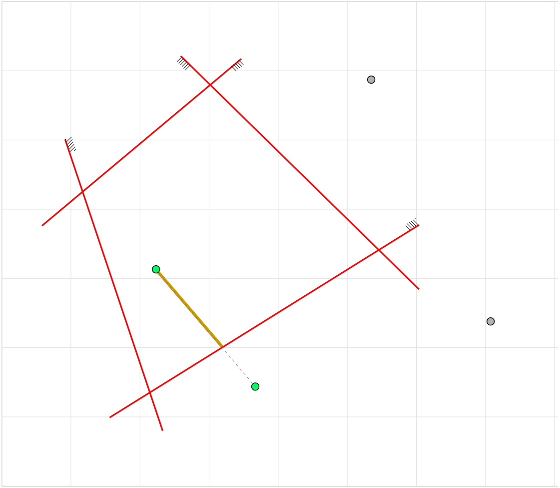
Método de Geração de Colunas

▷ Regiões factíveis



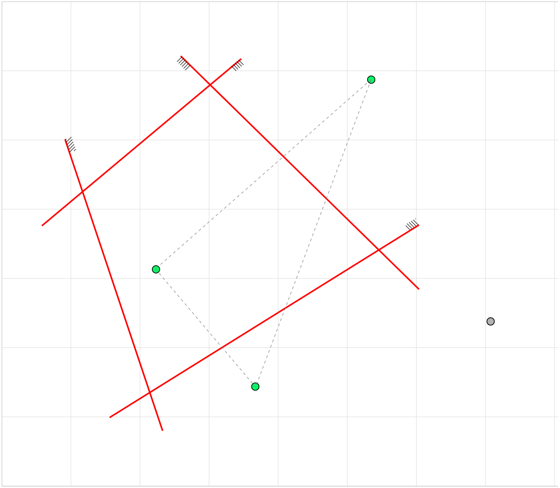
Método de Geração de Colunas

▷ Regiões factíveis



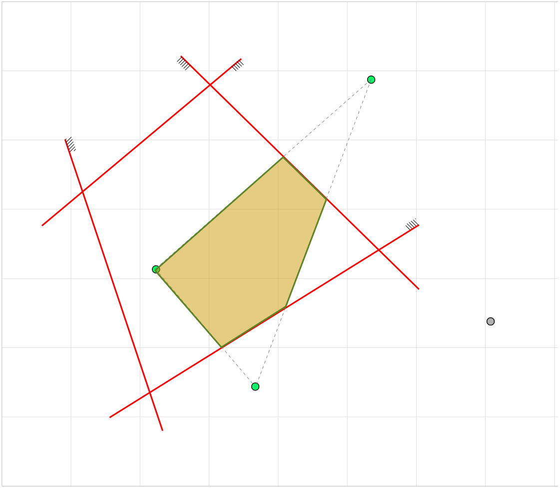
Método de Geração de Colunas

▷ Regiões factíveis



Método de Geração de Colunas

▷ Regiões factíveis



Geração de colunas

▷ Ford and Fulkerson, Management Science 5, 1958

MANAGEMENT SCIENCE
Vol. 50, No. 12 Supplement, December 2004, pp. 1778–1780
ISSN 0025-1909 | EISSN 1526-5501 | 04 | 5012S | 1778
DOI 10.1287/mnsc.1040.0269

A Suggested Computation for Maximal Multi-Commodity Network Flows

L. R. Ford Jr., D. R. Fulkerson
The RAND Corporation, Santa Monica, California

A simplex computation for an arc-chain formulation of the maximal multi-commodity network flow problem is proposed. Since the number of variables in this formulation is too large to be dealt with explicitly, the computation treats non-basic variables implicitly by replacing the usual method of determining a vector to enter the basis with several applications of a combinatorial algorithm for finding a shortest chain joining a pair of points in a network.

History: Received October 1957.

1. Introduction

A problem of some importance in applications of linear programming is the determination of maximal multi-commodity flows in networks. For example, some of the linear programming problems which have been proposed recently by Kalaba and Juncosa in their studies of communication networks (1956) can be cast in this form. Straightforward application particular formulation, the matrix of the linear program is the incidence matrix of arcs vs. all chains joining sources and sinks for the various commodities, and thus the number of variables is too large to be dealt with explicitly. The suggested computation treats non-basic variables implicitly by replacing the "pricing" operation of the simplex method (i.e. the determination of a vector to enter the basis) with several applications of a combinatorial algorithm for

Geração de colunas

▷ Ford and Fulkerson, Management Science 5, 1958

from S to T. Let π_k be the smallest such. To find a chain from S to T of length π_k, look for an arc P_jP_k such that $\pi_j + l_{jk} = \pi_k$, then search for an arc P_iP_j such that $\pi_i + l_{ij} = \pi_j$, and so on. Eventually a node of S is reached, and the desired chain has been traced out (in reverse).

If in the process of locating shortest chains from commodity sources to sinks, for the various commodities, one is found of length less than one, we recommend that the corresponding column vector of A be introduced into the basis immediately, rather than repeating the shortest chain algorithm a number of times in order to use the usual criterion for selection of a vector to enter the basis.

We point out that the reason for getting rid of negative multipliers α_r before using the shortest chain algorithm is that the algorithm may not work if arcs have negative lengths.

To start the simplex computation, one can of course begin with the basic variables $x_{n+1}, \ldots, x_{n+r}$, corresponding to the zero flow.

4. Concluding Remarks

Except for hand computation of a few small problems, we have no computational experience with the proposed method. Whether the method is practicable for a problem involving, say, 50 nodes, 100 arcs, and 20 commodity source-sink sets $S_1, T_1, \ldots, S_{20}, T_{20}$, is a question which can be settled only by experimentation. It would certainly be more practicable in

amount a_4 of commodity 2 at P_4. We can reduce this to a problem of the same type as before by introducing three new directed arcs and nodes as follows: A_1' from P_1' to P_1 with capacity a_1, A_2' from P_2' to P_2 with capacity a_2, and A_4' from P_4' to P_4 with capacity a_4. We then take P_1', P_2' as sources for commodity 1, and P_4' as the source for commodity 2. However, in the hypothesized large network with 20 commodities, the number of such new arcs would be $\sum_{i=1}^{20} n_i$, where n_i is the number of nodes in S_i, and since each new arc increases the size of basis matrices by one, this might take the problem out of range of present computing machines.

References

Dantzig, G. B., D. R. Fulkerson. 1955. Computation of maximal flows in networks. *Naval Res. Logist. Quart.* **2**(4).

Ford, L. R., Jr. 1956. *Network Flow Theory*, The RAND Corporation Paper P-923 (August 14).

Ford, L. R., Jr., D. R. Fulkerson. 1956. Maximal flow through a network. *Canad. J. Math.* **8** 399–404.

Ford, L. R., Jr., D. R. Fulkerson. 1957. A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem. *Canad. J. Math.* **9** 210–218.

Kalaba, R. E., M. L. Juncosa. 1956. Optimal design and utilization of communication networks. *Management Sci.* **3**(1).

Orden, A. 1956. The transshipment problem. *Management Sci.* **2**(3).

This article originally appeared in Management Science, October 1958, Volume 5, Number 1, pp. 97–101, published by The Institute of Management Sciences. Copyright is held by the Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), Linthicum, Maryland.

Tutorial

- ▷ Valerio de Carvalho, Boletim APDIO 54, 2016

TÉCNICAS DE IO

GERAÇÃO DE COLUNAS

José Valério de Carvalho,
Departamento de Produção e Sistemas,
Escola de Engenharia, Universidade do Minho

Introdução

A Programação Inteira (PI) é uma técnica da Investigação Operacional largamente usada na modelação e resolução de problemas. É hoje possível abordar problemas muito complexos, considerando as principais restrições e questões suscitadas em problemas reais. A investigação nesta área tem tido um enorme impacto económico em áreas como a logística e a distribuição, as telecomunicações ou os transportes aéreos, urbanos e de massas.

Parte deste sucesso é devido ao uso de modelos de geração de colunas, que permitem abordar grandes instâncias de problemas de programação inteira, usando modelos reformulados através do método de decomposição de Dantzig-Wolfe. O método de geração de colunas é conhecido desde os finais dos anos 50 [3 ,4], mas esta técnica ganhou um novo impulso quando surgiram ideias sobre a forma de compatibilizar geração de colunas com o método de partição e avaliação, para obter soluções óptimas inteiras para os modelos, dando origem ao método de partição e geração de colunas, designado, na literatura anglo-saxó-

Foi o trabalho de Savelsbergh no problema de afectação generalizado [11] que mostrou que a geração de colunas poderia ter um melhor desempenho que a relaxação lagrangeana, apesar de teoricamente serem equivalentes do ponto de vista de limites inferiores. A explicação avançada é que a informação dual mais completa fornecida pelo Método Simplex ajuda a uma melhor convergência, ao contrário do que acontece no método do subgradiente que, apesar da prova teórica de que converge, tem por vezes na prática dificuldade em encontrar o caminho para a solução óptima em tempo razoável.

Uma questão essencial que concorreu para assegurar a competitividade dos algoritmos de geração de colunas foi o aumento da eficiência dos packages de programação linear. Se tal não acontecesse, o método de geração de colunas, apesar de robusto, não seria porventura competitivo com a relaxação lagrangeana, que usa pouca informação e tem uma carga computacional muito menos pesada. Nos dias de hoje, a geração de colunas compete com packages que incorpo-

uma região fechada. Doravante, passaremos a designar esta região admissível por poliedro.

A Decomposição de Dantzig-Wolfe (DW) é aplicada a um modelo de programação linear (PL), que vamos designar por modelo original, cujas restrições podem ser divididas em dois conjuntos: um conjunto de restrições gerais e um conjunto designado por com uma estrutura especial:

$$\min\ z_{PL} := c^T x \qquad (1)$$
$$\text{suj. a } A x \geq b \qquad (2)$$
$$x \in X \qquad (3)$$
$$x \geq 0 \qquad (4)$$

em que $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, e $x \in R^n$ é um vector de variáveis de decisão. A região de soluções admissíveis deste modelo é $X_{PL} = \{x \in R^n_+ : A x \geq b, x \in X\}$.

É comum os modelos serem compostos por vários conjuntos de restrições. A título de exemplo, o problema de corte de rolos pode ser modelado com um conjunto de restrições que determinam que os itens cortados de um rolo não usam mais espaço do que a

Exercício

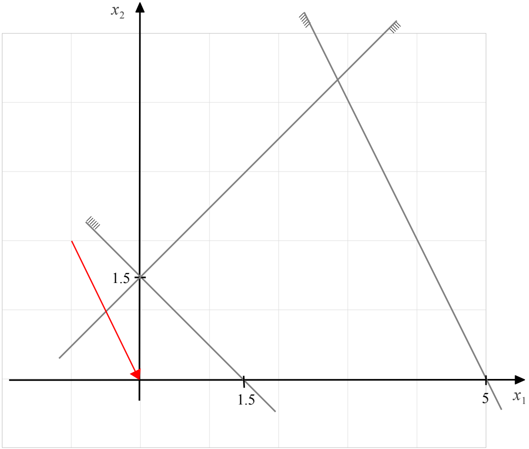
Aplique DDW e resolva por geração de colunas (considere que as três primeiras restrições são de acoplamento e apenas um único subproblema)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& 1 \leq x_1 \leq 3 \\
& 1 \leq x_2 \leq 3
\end{aligned}
$$

Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

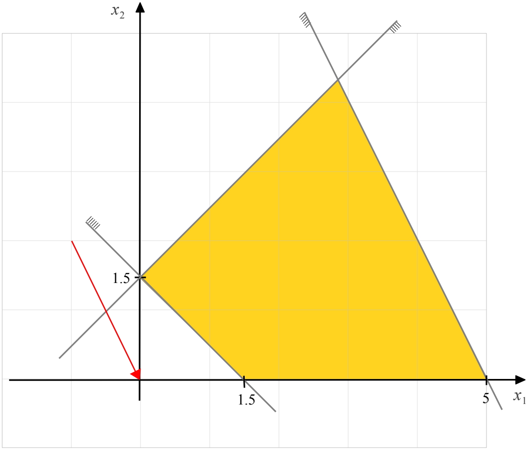
$$\begin{aligned} \text{min} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{aligned}$$



Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

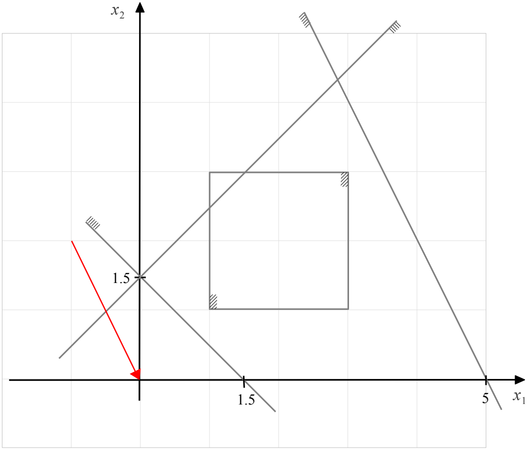
$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10
\end{aligned}
$$



Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

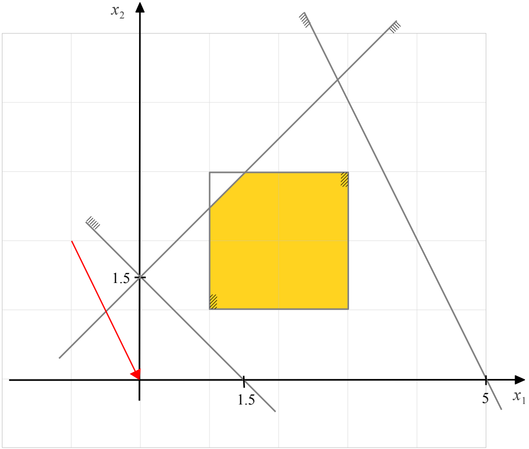
$$\begin{array}{ll} \text{min} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 1 \leq x_1 \leq 3 \\ & 1 \leq x_2 \leq 3 \end{array}$$



Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& 1 \leq x_1 \leq 3 \\
& 1 \leq x_2 \leq 3
\end{array}
$$



Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
& 1 \leq x_1 \leq 3 \\
& 1 \leq x_2 \leq 3
\end{aligned}
$$

Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

com $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \mid 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3\}$

Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

$\mathcal{X}$ é um conjunto limitado e, portanto, pode ser representado por seus pontos extremos $\bar{x}_q$, $q \in Q$. Assim, temos $x = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q \lambda_q$

Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

$\mathcal{X}$ é um conjunto limitado e, portanto, pode ser representado por seus pontos extremos $\bar{x}_q$, $q \in Q$. Assim, temos $x = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q \lambda_q$ e obtemos o **Problema Mestre**:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} (\bar{x}_{q1} - 2\bar{x}_{q2})\lambda_q \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} (2\bar{x}_{q1} + 2\bar{x}_{q2})\lambda_q \geq 3 \\
& \sum_{q \in Q} (-2\bar{x}_{q1} + 2\bar{x}_{q2})\lambda_q \leq 3 \\
& \sum_{q \in Q} (2\bar{x}_{q1} + \bar{x}_{q2})\lambda_q \leq 10 \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1 \\
& \lambda_q \geq 0, \;\; q \in Q
\end{aligned}
$$

Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

Subproblema

$$(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{v})$$

$$\text{min } (x_1 - 2x_2) - (2x_1 + 2x_2)\bar{p}_1 - (-2x_1 + 2x_2)\bar{p}_2 - (2x_1 + x_2)\bar{p}_3$$

$$\text{s.a } 1 \leq x_1 \leq 3; \; 1 \leq x_2 \leq 3$$

Exercício

▷ Aplique DDW e resolva por geração de colunas

Subproblema

$$(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{v})$$

$$\text{min } (x_1 - 2x_2) - (2x_1 + 2x_2)\bar{p}_1 - (-2x_1 + 2x_2)\bar{p}_2 - (2x_1 + x_2)\bar{p}_3$$

$$\text{s.a } \; 1 \leq x_1 \leq 3; \; 1 \leq x_2 \leq 3$$

$$\Rightarrow \text{ min } (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\text{s.a } \; 1 \leq x_1 \leq 3; \; 1 \leq x_2 \leq 3$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 0

PMR inicial

Coluna artificial apenas

$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}_0) \quad \text{min} \quad & 1000\lambda_a \\
\text{s.a} \quad & 3\lambda_a \geq 3 \\
& 0\lambda_a \leq 3 \\
& 0\lambda_a \leq 10 \\
& 1\lambda_a = 1, \\
& \lambda_a \geq 0.
\end{aligned}
$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 0

PMR inicial

Coluna artificial apenas

$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}_0)\quad \min \quad & 1000\lambda_a \\
\text{s.a} \quad & 3\lambda_a \geq 3 \\
& 0\lambda_a \leq 3 \\
& 0\lambda_a \leq 10 \\
& 1\lambda_a = 1, \\
& \lambda_a \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$\bar{\lambda}_a = 1;$$

$$\bar{p}_1 = 333.33;\ \bar{p}_2 = 0;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = 0;$$

$$LI = -\infty;\ LS = 1000.$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 0

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 333.3333;\ \bar{p}_2 = 0;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = 0;$$

$$(\mathsf{SP}_0)\ \ \mathsf{min}\ (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow\ \ \mathsf{min}\ -665.66x_1 - 668.66x_2$$

$$\mathsf{s.a}\ \ 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 0

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 333.3333;\ \bar{p}_2 = 0;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = 0;$$

$$(\mathsf{SP}_0)\quad \mathsf{min}\ (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow\quad \mathsf{min}\ -665.66x_1 - 668.66x_2$$

$$\mathsf{s.a}\quad 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

$$\bar{x}_1 = 3;\ \bar{x}_2 = 3;\ \bar{f} = -4003.$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 0

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 333.3333;\ \bar{p}_2 = 0;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = 0;$$

$$(\mathsf{SP}_0)\quad \min\ (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow\quad \min\ -665.66x_1 - 668.66x_2$$

$$\text{s.a}\quad 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

$$\bar{x}_1 = 3;\ \bar{x}_2 = 3;\ \bar{f} = -4003.$$

$$\text{Coluna:}\quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 \\ \hline 2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 \\ -2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 \\ 2\bar{x}_1 + 1\bar{x}_2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 6 \\ \hline 6 + 6 \\ -6 + 6 \\ 6 + 3 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ \hline 12 \\ 0 \\ 9 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

PMR 1

$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}_1) \quad \text{min} \quad & 1000\lambda_a - 3\lambda_1 \\
\text{s.a} \quad & 3\lambda_a + 12\lambda_1 \geq 3 \\
& 0\lambda_a + 0\lambda_1 \leq 3 \\
& 0\lambda_a + 9\lambda_1 \leq 10 \\
& 1\lambda_a + 1\lambda_1 = 1, \\
& \lambda_a, \lambda_1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

PMR 1

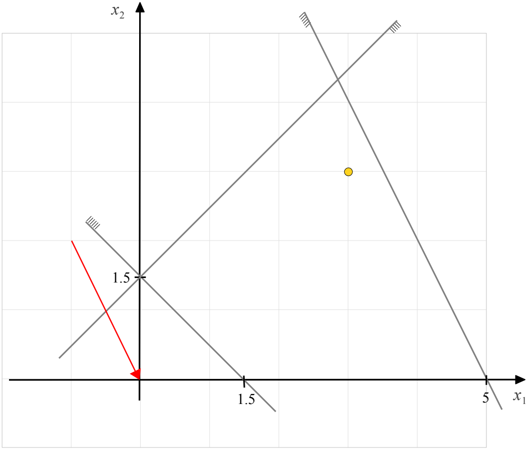
$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}_1)\quad \min \quad & 1000\lambda_a - 3\lambda_1 \\
\text{s.a} \quad & 3\lambda_a + 12\lambda_1 \geq 3 \\
& 0\lambda_a + 0\lambda_1 \leq 3 \\
& 0\lambda_a + 9\lambda_1 \leq 10 \\
& 1\lambda_a + 1\lambda_1 = 1, \\
& \lambda_a, \lambda_1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$\bar{\lambda}_a = 0; \;\; \bar{\lambda}_1 = 1;$$

$$\bar{p}_1 = 0; \;\; \bar{p}_2 = 0; \;\; \bar{p}_3 = 0; \;\; \bar{v} = -3;$$

$$LI = 1000 + (-4003) = -3003; \;\; LS = -3.$$

Exercício



$$x = \lambda^1 \bar{x}^1 = 1 \times (3, 3) = (3, 3)$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 0;\ \bar{p}_2 = 0;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = -3;$$

$$(\mathsf{SP}_1)\ \ \min\ (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow\ \ \min\ 1x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a}\ \ 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 0;\ \bar{p}_2 = 0;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = -3;$$

$$(\mathsf{SP}_1)\quad \min\ (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow \quad \min\ 1x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a}\quad 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

$$\bar{x}_1 = 1;\ \bar{x}_2 = 3;\ \bar{f} = -5.$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 0;\ \bar{p}_2 = 0;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = -3;$$

$$(\text{SP}_1)\ \ \text{min } (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow \quad \text{min } 1x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a } \ 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

$$\bar{x}_1 = 1;\ \bar{x}_2 = 3;\ \bar{f} = -5.$$

$$\text{Coluna: } \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 \\ \hline 2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 \\ -2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 \\ 2\bar{x}_1 + 1\bar{x}_2 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 6 \\ \hline 2 + 6 \\ -2 + 6 \\ 2 + 3 \\ \hline 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ \hline 8 \\ 4 \\ 5 \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 2

PMR 2

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{PMR}_2) \quad \min \quad & 1000\lambda_a - 3\lambda_1 - 5\lambda_2 \\
\text{s.a} \quad & 3\lambda_a + 12\lambda_1 + 8\lambda_2 \geq 3 \\
& 0\lambda_a + 0\lambda_1 + 4\lambda_2 \leq 3 \\
& 0\lambda_a + 9\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 10 \\
& 1\lambda_a + 1\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\
& \lambda_a, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 2

PMR 2

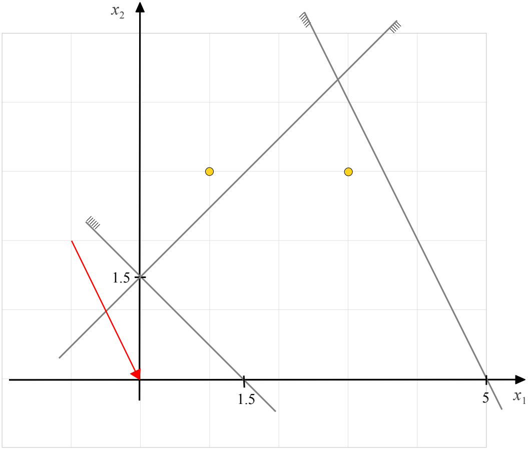
$$
\begin{aligned}
(\text{PMR}_2) \quad \min \quad & 1000\lambda_a - 3\lambda_1 - 5\lambda_2 \\
\text{s.a} \quad & 3\lambda_a + 12\lambda_1 + 8\lambda_2 \geq 3 \\
& 0\lambda_a + 0\lambda_1 + 4\lambda_2 \leq 3 \\
& 0\lambda_a + 9\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 10 \\
& 1\lambda_a + 1\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\
& \lambda_a, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$\bar{\lambda}_a = 0;\ \bar{\lambda}_1 = 0.25;\ \bar{\lambda}_2 = 0.75$$

$$\bar{p}_1 = 0;\ \bar{p}_2 = -0.5;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = -3;$$

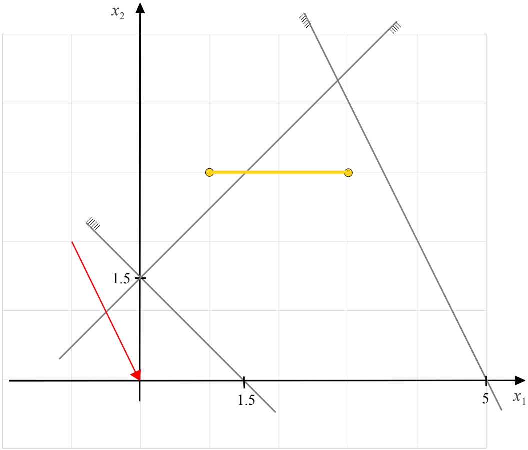
$$LI = -3 + (-5 + 3) = -5;\ LS = -4.5.$$

Exercício



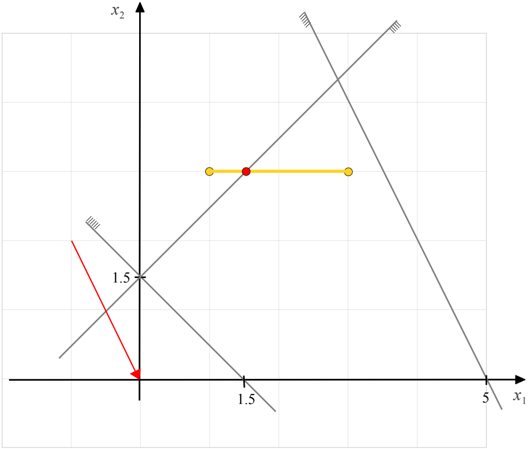
$$\bar{x}^1 = (3,3);\ \bar{x}^2 = (1,3);$$

Exercício



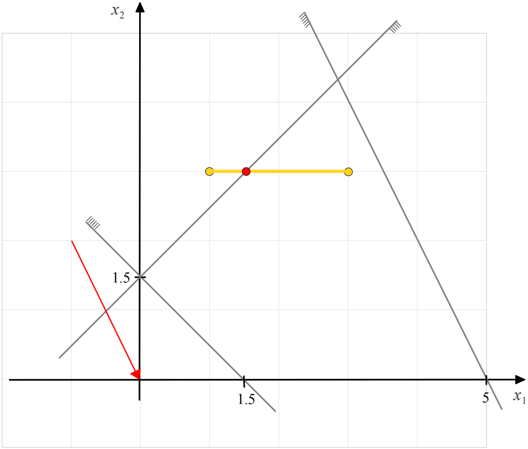
$$\lambda^1 \bar{x}^1 + \lambda^2 \bar{x}^2,\ \lambda^1 + \lambda^2 = 1;$$

Exercício



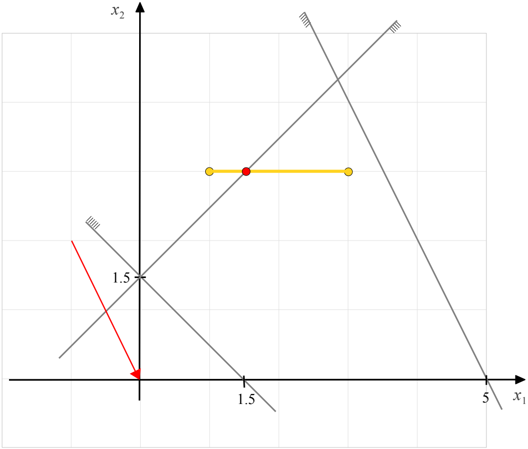
$x =$

Exercício



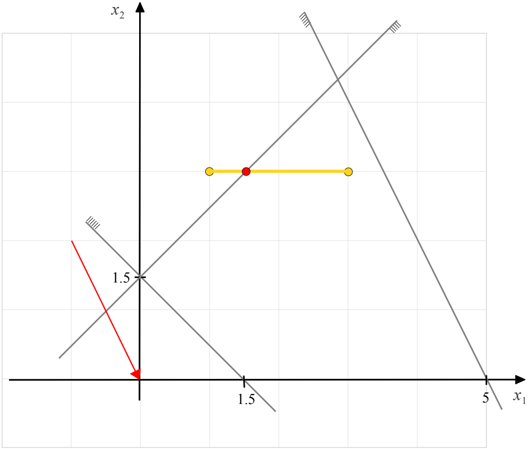
$$x = \lambda^1 \bar{x}^1 + \lambda^2 \bar{x}^2 =$$

Exercício



$$x = \lambda^1 \bar{x}^1 + \lambda^2 \bar{x}^2 = 0.25 \times (3,3) + 0.75 \times (1,3) =$$

Exercício



$$x = \lambda^1 \bar{x}^1 + \lambda^2 \bar{x}^2 = 0.25 \times (3,3) + 0.75 \times (1,3) = (1.5, 3)$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 0;\ \bar{p}_2 = -0.5;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = -3;$$

$$(\mathsf{SP}_1)\ \ \text{min}\ (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow\ \ \text{min}\ 0x_1 - 1x_2$$

$$\text{s.a}\ \ 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 0;\ \bar{p}_2 = -0.5;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = -3;$$

$$(\mathsf{SP}_1)\ \ \mathsf{min}\ (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow\ \ \mathsf{min}\ 0x_1 - 1x_2$$

$$\mathsf{s.a}\ \ 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

$$\bar{x}_1 = 1;\ \bar{x}_2 = 3;\ \bar{f} = -3.$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 0;\ \bar{p}_2 = -0.5;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = -3;$$

$$(\mathsf{SP}_1)\quad \text{min } (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow \quad \text{min } 0x_1 - 1x_2$$

$$\text{s.a}\quad 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

$$\bar{x}_1 = 1;\ \bar{x}_2 = 3;\ \bar{f} = -3.$$

$$\bar{f} - \bar{v} = -3 + 3 = 0$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 1

Subproblema

$$\bar{p}_1 = 0;\ \bar{p}_2 = -0.5;\ \bar{p}_3 = 0;\ \bar{v} = -3;$$

$$(\mathsf{SP}_1)\quad \min\ (1 - 2\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - 2\bar{p}_3)x_1 + (-2 - 2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 - 1\bar{p}_3)x_2$$

$$\Rightarrow \quad \min\ 0x_1 - 1x_2$$

$$\text{s.a}\quad 1 \leq x_1 \leq 3;\ 1 \leq x_2 \leq 3$$

$$\bar{x}_1 = 1;\ \bar{x}_2 = 3;\ \bar{f} = -3.$$

$$\bar{f} - \bar{v} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow \text{Solução ótima encontrada!}$$

Método de Geração de Colunas

▷ Exercício: Iteração 2

PMR Ótimo

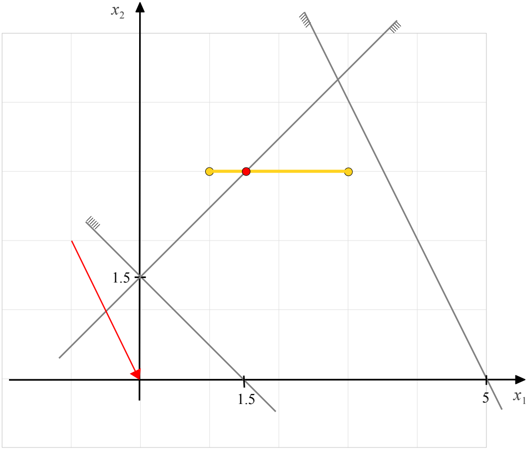
$$
\begin{aligned}
\text{(PMR)} \quad \min \quad & 1000\lambda_a - 3\lambda_1 - 5\lambda_2 \\
\text{s.a} \quad & 3\lambda_a + 12\lambda_1 + 8\lambda_2 \geq 3 \\
& 0\lambda_a + 0\lambda_1 + 4\lambda_2 \leq 3 \\
& 0\lambda_a + 9\lambda_1 + 5\lambda_2 \leq 10 \\
& 1\lambda_a + 1\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \\
& \lambda_a, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$\bar{\lambda}_a = 0; \ \bar{\lambda}_1 = 0.25; \ \bar{\lambda}_2 = 0.75$$

$$\bar{p}_1 = 0; \ \bar{p}_2 = -0.5; \ \bar{p}_3 = 0; \ \bar{v} = -3;$$

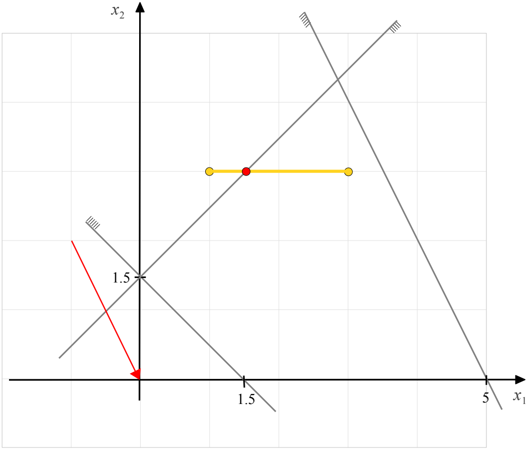
$$LI = -4.5 + (-3 + 3) = -4.5; \ LS = -4.5.$$

Exercício



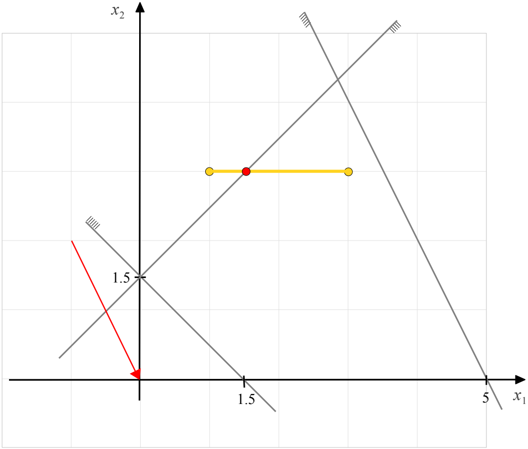
$$x =$$

Exercício



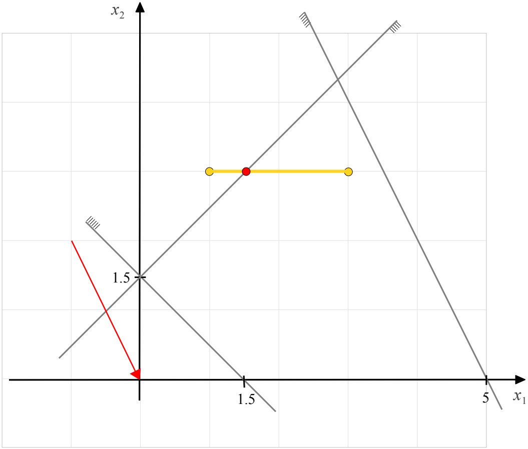
$$x = \lambda^1 \bar{x}^1 + \lambda^2 \bar{x}^2 =$$

Exercício



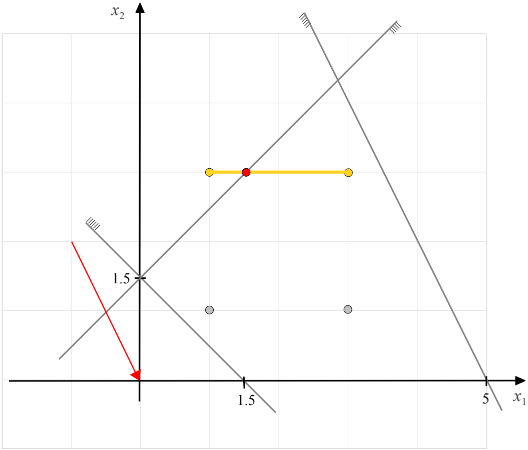
$$x = \lambda^1 \bar{x}^1 + \lambda^2 \bar{x}^2 = 0.25 \times (3,3) + 0.75 \times (1,3) =$$

Exercício



$$x = \lambda^1 \bar{x}^1 + \lambda^2 \bar{x}^2 = 0.25 \times (3,3) + 0.75 \times (1,3) = (1.5, 3)$$

Exercício



Não foi necessário enumerar todos os pontos extremos!

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?