Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 12.4: Reformulação generalizada para otimização convexa

Objetivos deste tópico

- Conhecer o conceito de linearização interna e entender como usá-lo;
- Relacionar esse conceito com a decomposição de Dantzig-Wolfe.

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- DDW é baseada em um conceito mais geral:
  linearização interna (*inner linearization*);

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

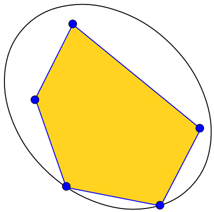
- DDW é baseada em um conceito mais geral: linearização interna (*inner linearization*);
- Pode ser aplicada a problemas de Otimização Convexa: descritos por funções convexas sobre conjuntos convexos;

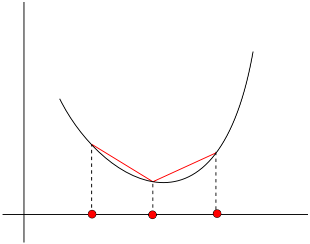
Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- DDW é baseada em um conceito mais geral: linearização interna (*inner linearization*);
- Pode ser aplicada a problemas de Otimização Convexa: descritos por funções convexas sobre conjuntos convexos;
- Pontos internos são usados para aproximar a função e a região factível;

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- DDW é baseada em um conceito mais geral: linearização interna (*inner linearization*);
- Pode ser aplicada a problemas de Otimização Convexa: descritos por funções convexas sobre conjuntos convexos;
- Pontos internos são usados para aproximar a função e a região factível;





Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- Considere um problema de otimização convexa definido por

$$\min \; f(x), \quad \text{s.a } F(x) \leq 0, \; x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- Considere um problema de otimização convexa definido por

$$\min \; f(x), \quad \text{s.a } F(x) \leq 0, \; x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{X}$ é um conjunto limitado;

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- Considere um problema de otimização convexa definido por

$$\min\ f(x), \quad \text{s.a } F(x) \leq 0,\ x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{X}$ é um conjunto limitado;
- Para uma base apropriada de pontos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{|Q|}\} \in \mathcal{X}$, podemos escrever $x \in \mathcal{X}$

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q x_q, \text{ com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1.$$

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- Considere um problema de otimização convexa definido por

$$\min \; f(x), \quad \text{s.a } F(x) \leq 0, \; x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{X}$ é um conjunto limitado;
- Para uma base apropriada de pontos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{|Q|}\} \in \mathcal{X}$, podemos escrever $x \in \mathcal{X}$

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q x_q, \text{ com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1.$$

- f é convexa $\Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{q \in Q} \lambda_q x_q\right) \leq \sum_{q \in Q} \lambda_q f\left(x_q\right)$

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- Considere um problema de otimização convexa definido por

$$\min \ f(x), \quad \text{s.a } F(x) \leq 0, \ x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{X}$ é um conjunto limitado;
- Para uma base apropriada de pontos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{|Q|}\} \in \mathcal{X}$, podemos escrever $x \in \mathcal{X}$

$$x = \sum_{q \in Q} \lambda_q x_q, \text{ com } \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1.$$

- f é convexa $\Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{q \in Q} \lambda_q x_q\right) \leq \sum_{q \in Q} \lambda_q f(x_q)$
- O mesmo se aplica a F.

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- Substituindo no problema original, temos a aproximação:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda} \quad & f\left(\sum_{q\in Q} \lambda_q x_q\right), \\
\text{s.a} \quad & F\left(\sum_{q\in Q} \lambda_q x_q\right) \leq 0, \\
& \sum_{q\in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \qquad\qquad \forall q \in Q,
\end{aligned}
$$

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- e podemos fazer tão próximo quanto se queira pelo seguinte Problema Mestre linear:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda} \quad & \sum_{q \in Q} f_q \lambda_q, \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} F_q \lambda_q \leq 0, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \qquad \forall q \in Q,
\end{aligned}
$$

com $f_q = f(x_q)$ e $F_q = F(x_q)$.

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- e podemos fazer tão próximo quanto se queira pelo seguinte Problema Mestre linear:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & \sum_{q \in Q} f_q \lambda_q, \\ \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} F_q \lambda_q \leq 0, \\ & \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\ & \lambda_q \geq 0, \qquad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

com $f_q = f(x_q)$ e $F_q = F(x_q)$.

- Soluções duais: $\overline{u} \in \mathbb{R}^m_-$ e $\overline{v} \in \mathbb{R}$;

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

- e podemos fazer tão próximo quanto se queira pelo seguinte Problema Mestre linear:

$$
\begin{aligned}
\min_{\lambda} \quad & \sum_{q \in Q} f_q \lambda_q, \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} F_q \lambda_q \leq 0, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \qquad \forall q \in Q,
\end{aligned}
$$

  com $f_q = f(x_q)$ e $F_q = F(x_q)$.
- Soluções duais: $\overline{u} \in \mathbb{R}^m_-$ e $\overline{v} \in \mathbb{R}$;
- Subproblema (convexo): $SP(\overline{u}) := \min_{x \in \mathcal{X}} \{f(x) - \overline{u}F(x)\}$

Reformulação generalizada para Otimização Convexa

▷ Geoffrion, Management Science 16, 1970

MANAGEMENT SCIENCE
Vol. 16, No. 11, July, 1970
Printed in U.S.A.

ELEMENTS OF LARGE-SCALE MATHEMATICAL PROGRAMMING

PART I: CONCEPTS*†‡§

ARTHUR M. GEOFFRION

University of California, Los Angeles

A framework of concepts is developed which helps to unify a substantial portion of the literature on large-scale mathematical programming. These concepts fall into two categories. The first category consists of problem manipulations that can be used to derive what are often referred to as "master" problems; the principal manipulations discussed are Projection, Inner Linearization, and Outer Linearization. The second category consists of solution strategies that can be used to solve the master problems, often with the result that "subproblems" arise which can then be solved by specialized algorithms. The Piecewise, Restriction, and Relaxation strategies are the principal ones discussed. Numerous algorithms found in the literature are classified according to the manipulation/strategy pattern they can be viewed as using, and the usefulness of the framework is demonstrated by using it (see Part II of this paper) to rederive a representative selection of algorithms.

The material presented is listed in the following order: The first section is introductory in nature, and discusses types of large-scale problems, the scope of discussion and the literature, and the notation used. The second section, entitled "Problem Manipulations: Source of 'Master' Problems" covers the subjects of projection, inner linearization and outer linearization. The third section, "Solution Strategies: Source of 'Subproblems'," discusses piecewise strategy, restriction and relaxation. The fourth section is entitled "Synthesizing Known Algorithms from Manipulations and Strategies," and is followed by a concluding section and an extensive bibliography.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?