Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 13.2: Decomposição de Dantzig-Wolfe: Agregação de subproblemas

Objetivos deste tópico

- Entender como realizar a agregação de subproblemas e conhecer suas vantagens e consequências, principalmente quando esses subproblemas são idênticos.

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: estrutura em blocos

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x, \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Dx = d, x \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: estrutura em blocos

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, \\
\text{s.a} \quad & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K = b, \\
& \qquad x^k \in \mathcal{X}^k, \qquad\qquad k = 1, \ldots, K
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^kx^k = d^k, x^k \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{X}^1 : \\ \mathcal{X}^2 : \\ \vdots \\ \mathcal{X}^K :
\end{array}
\begin{bmatrix}
D^1 & & & \\
& D^2 & & \\
& & \ddots & \\
& & & D^K
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K
\end{bmatrix}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: estrutura em blocos

$$
\begin{array}{lll}
\text{min} & f(x) = c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, & \\
\text{s.a} & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K = b, & \\
& x^k \in \mathcal{C}^k = conv(\mathcal{X}^k), & k = 1, \ldots, K, \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, & k = 1, \ldots, K
\end{array}
$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^kx^k = d^k, x^k \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{X}^1 : \\ \mathcal{X}^2 : \\ \vdots \\ \mathcal{X}^K :
\end{array}
\begin{bmatrix}
D^1 & & & \\
& D^2 & & \\
& & \ddots & \\
& & & D^K
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K
\end{bmatrix}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: estrutura em blocos

Problema Mestre Desagregado:

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{k=1}^{K} \sum_{q \in Q^k} c_q^k \lambda_q^k + \sum_{k=1}^{K} \sum_{r \in R^k} c_r^k \mu_r^k \\
\text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^{K} \sum_{q \in Q^k} a_q^k \lambda_q^k + \sum_{k=1}^{K} \sum_{r \in R^k} a_r^k \mu_r^k = b, \\
& \sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k = 1, && k = 1, \dots, K, \\
& \lambda_q^k \geq 0, \ \mu_r^k \geq 0, && k = 1, \dots, K, \ \forall q \in Q^k, \forall r \in R^k. \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, && k = 1, \dots, K, \\
& x^k = \sum_{q \in Q^k} \lambda_q^k \bar{x}_q^k + \sum_{r \in R^k} \mu_r \bar{x}_r^k, && k = 1, \dots, K.
\end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, \\
\text{s.a} \quad & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K = b, \\
& x^k \in \mathcal{X}^k, \qquad\qquad k = 1, \ldots, K
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^kx^k = d^k, x^k \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{X}^1 : \\ \mathcal{X}^2 : \\ \vdots \\ \mathcal{X}^K :
\end{array}
\begin{bmatrix}
D^1 & & & \\
& D^2 & & \\
& & \ddots & \\
& & & D^K
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K
\end{bmatrix}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, \\
\text{s.a} \quad & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K = b, \\
& x \in \mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \times \mathcal{X}^2 \times \ldots \times \mathcal{X}^K
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^kx^k = d^k, x^k \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h
$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{X}^1 : \\
\mathcal{X}^2 : \\
\vdots \\
\mathcal{X}^K :
\end{array}
\begin{bmatrix}
D^1 & & & \\
& D^2 & & \\
& & \ddots & \\
& & & D^K
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K
\end{bmatrix}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, \\
\text{s.a} \quad & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K = b, \\
& x \in \mathcal{C} = \mathcal{C}^1 \times \mathcal{C}^2 \times \ldots \times \mathcal{C}^K, \\
& x \in \mathbb{Z}^n_+,
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^kx^k = d^k, x^k \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{X}^1: \\ \mathcal{X}^2: \\ \vdots \\ \mathcal{X}^K:
\end{array}
\begin{bmatrix}
D^1 & & & \\
& D^2 & & \\
& & \ddots & \\
& & & D^K
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K
\end{bmatrix}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\min \quad \sum_{q\in Q}\left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_q^k\right)\lambda_q + \sum_{r\in R}\left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_r^k\right)\mu_r$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\ \text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1,
\end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q\in Q}\left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_q^k\right)\lambda_q + \sum_{r\in R}\left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_r^k\right)\mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q\in Q}\left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_q^k\right)\lambda_q + \sum_{r\in R}\left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_r^k\right)\mu_r = b, \\
& \sum_{q\in Q}\lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \qquad\qquad q\in Q, r\in R
\end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q\in Q}\left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_q^k\right)\lambda_q + \sum_{r\in R}\left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_r^k\right)\mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q\in Q}\left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_q^k\right)\lambda_q + \sum_{r\in R}\left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_r^k\right)\mu_r = b, \\
& \sum_{q\in Q}\lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, && q\in Q, r\in R, \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, && k = 1,\ldots,K
\end{aligned}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, && q \in Q, r \in R, \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, && k = 1, \ldots, K, \\
& x^k = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q^k + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r^k, && k = 1, \ldots, K.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: agregação

Problema Mestre Agregado:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} \hat{c}_q \lambda_q + \sum_{r \in R} \hat{c}_r \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \hat{a}_q \lambda_q + \sum_{r \in R} \hat{a}_r \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \qquad q \in Q, r \in R, \\
& x \in \mathbb{Z}_+^n, \\
& x = \sum_{q \in Q} \lambda_q \bar{x}_q + \sum_{r \in R} \mu_r \bar{x}_r,
\end{aligned}
$$

$$\hat{c}_q = \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_q^k \right) \; ; \; \hat{a}_q = \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_q^k \right) \; ; \; \hat{c}_r = \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_r^k \right) \; ; \; \hat{a}_r = \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_r^k \right)$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^1x^1 + c^2x^2 + \ldots + c^Kx^K, \\
\text{s.a} \quad & A^1x^1 + A^2x^2 + \ldots + A^Kx^K = b, \\
& x^k \in \mathcal{X}^k, \qquad\qquad k = 1, \ldots, K
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^kx^k = d^k, x^k \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{X}^1 : \\ \mathcal{X}^2 : \\ \vdots \\ \mathcal{X}^K :
\end{array}
\begin{bmatrix}
D^1 & & & \\
& D^2 & & \\
& & \ddots & \\
& & & D^K
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K
\end{bmatrix}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^1x^1 + c^1x^2 + \ldots + c^1x^K, \\
\text{s.a} \quad & A^1x^1 + A^1x^2 + \ldots + A^1x^K = b, \\
& x^k \in \mathcal{X}^k, \qquad\qquad k = 1, \ldots, K
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{X}^k = \{x^k \in \mathbb{Z}^{n_k} \mid D^1x^k = d^1, x^k \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{X}^1: \\ \mathcal{X}^2: \\ \vdots \\ \mathcal{X}^K:
\end{array}
\begin{bmatrix}
D^1 & & & \\
& D^1 & & \\
& & \ddots & \\
& & & D^1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^K
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d^1 \\ d^1 \\ \vdots \\ d^1
\end{bmatrix}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^1x^1 + c^1x^2 + \ldots + c^1x^K, \\ \text{s.a} \quad & A^1x^1 + A^1x^2 + \ldots + A^1x^K = b, \\ & \qquad x^k \in \mathcal{X}^1, \qquad\qquad k = 1, \ldots, K \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}^1 = \{x^1 \in \mathbb{Z}^{n_1} \mid D^1x^1 = d^1, x^1 \geq 0\},\ b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{X}^1 : \\ \mathcal{X}^1 : \\ \vdots \\ \mathcal{X}^1 : \end{array} \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^1 \\ \vdots \\ d^1 \end{bmatrix}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^{K} c^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_q^k \right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(\sum_{k=1}^{K} A^k \bar{x}_r^k \right) \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, && q \in Q, r \in R, \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, && k = 1, \dots, K, \\
& x^k = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q^k \lambda_q + \sum_{r \in R} \bar{x}_r^k \mu_r, && k = 1, \dots, K.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{q\in Q}\left(\sum_{k=1}^{K} c^1 \bar{x}_q^1\right)\lambda_q + \sum_{r\in R}\left(\sum_{k=1}^{K} c^1 \bar{x}_r^1\right)\mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q\in Q}\left(\sum_{k=1}^{K} A^1 \bar{x}_q^1\right)\lambda_q + \sum_{r\in R}\left(\sum_{k=1}^{K} A^1 \bar{x}_r^1\right)\mu_r = b, \\
& \sum_{q\in Q}\lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, && q\in Q, r\in R, \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, && k=1,\ldots,K, \\
& x^k = \sum_{q\in Q}\bar{x}_q^1\lambda_q + \sum_{r\in R}\bar{x}_r^1\mu_r, && k=1,\ldots,K.
\end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} \left(Kc^1 \bar{x}_q^1\right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(Kc^1 \bar{x}_r^1\right) \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(KA^1 \bar{x}_q^1\right) \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(KA^1 \bar{x}_r^1\right) \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, \qquad q \in Q, r \in R, \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \qquad k = 1, \ldots, K,
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=1}^{K} x^k = \sum_{q \in Q} K \bar{x}_q^1 \lambda_q + \sum_{r \in R} K \bar{x}_r^1 \mu_r.
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} \left(c^1 \bar{x}_q^1\right) K \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(c^1 \bar{x}_r^1\right) K \mu_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} \left(A^1 \bar{x}_q^1\right) K \lambda_q + \sum_{r \in R} \left(A^1 \bar{x}_r^1\right) K \mu_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \lambda_q = 1, \\
& \lambda_q \geq 0, \mu_r \geq 0, && q \in Q, r \in R, \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, && k = 1, \ldots, K, \\
& \sum_{k=1}^{K} x^k = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q^1 K \lambda_q + \sum_{r \in R} \bar{x}_r^1 K \mu_r.
\end{aligned}$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe

▷ Problemas de otimização discreta: blocos idênticos

Problema Mestre Agregado:

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{q \in Q} (c^1 \bar{x}_q^1)\, \hat{\lambda}_q + \sum_{r \in R} (c^1 \bar{x}_r^1)\, \hat{\mu}_r \\
\text{s.a} \quad & \sum_{q \in Q} (A^1 \bar{x}_q^1)\, \hat{\lambda}_q + \sum_{r \in R} (A^1 \bar{x}_r^1)\, \hat{\mu}_r = b, \\
& \sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q = K, \\
& \hat{\lambda}_q \geq 0, \hat{\mu}_r \geq 0, \qquad q \in Q, r \in R, \\
& x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \qquad k = 1, \ldots, K, \\
& \sum_{k=1}^{K} x^k = \sum_{q \in Q} \bar{x}_q^1 \hat{\lambda}_q + \sum_{r \in R} \bar{x}_r^1 \hat{\mu}_r.
\end{aligned}$$

- com $\hat{\lambda}_q = K\lambda_q; \quad \hat{\mu}_r = K\mu_r$.

Algumas observações...

- Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$.

Algumas observações...

- Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;

Algumas observações...

- Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM.

Algumas observações...

- Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;

Algumas observações...

- Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;
- Agregação é útil quando se tem muitos subproblemas.

Algumas observações...

- Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;
- Agregação é útil quando se tem muitos subproblemas. Independente do número de subproblemas, acrescenta-se sempre uma única coluna por iteração.

Algumas observações...

- Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;
- Agregação é útil quando se tem muitos subproblemas. Independente do número de subproblemas, acrescenta-se sempre uma única coluna por iteração. Entretanto, pode dificultar a solução do problema, já que várias colunas são agregadas em uma única;

Algumas observações...

- Quando $0 \in \mathcal{X}$, a restrição de convexidade pode ser relaxada para $\sum_{q \in Q} \lambda_q \leq 1$. O mesmo se aplica para o caso agregado com blocos idênticos, i.e. $\sum_{q \in Q} \hat{\lambda}_q \leq K$;
- Em alguns problemas, as restrições de convexidade são sempre satisfeitas, devido à implicação de outras restrições do PM. Nesses casos, podem ser descartadas;
- Agregação é útil quando se tem muitos subproblemas. Independente do número de subproblemas, acrescenta-se sempre uma única coluna por iteração. Entretanto, pode dificultar a solução do problema, já que várias colunas são agregadas em uma única;
- A agregação de blocos idênticos pode dificultar a ramificação.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?