Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

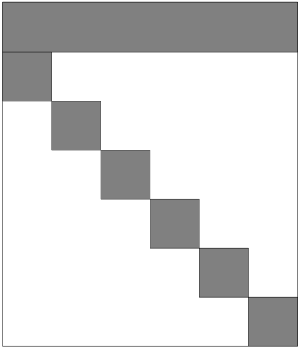
PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

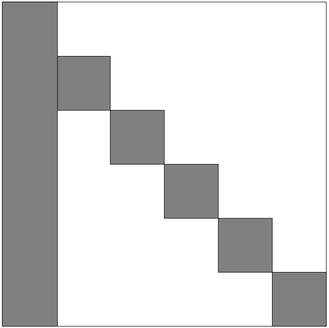
Tópico 14.1: Introdução à decomposição de Benders

Objetivos deste tópico

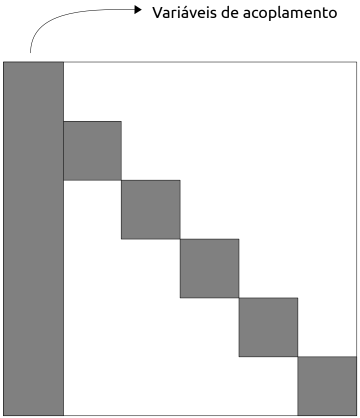
- Conhecer a decomposição de Benders e ver como aplicá-la em problemas de Otimização Contínua;
- Ver como usar o método de planos de corte para resolver o Problema Mestre de Benders.

Problemas de grande-porte





Problemas de grande-porte



Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax \qquad\quad = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \geq 0, y \geq 0,
\end{aligned}
$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^h$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_{x,y} & c^T x + h^1 y^1 + \ldots + h^K y^K & \\
\text{s.a} & Ax = b, & \\
& \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^K \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, & \\
& x \geq 0, y \geq 0. &
\end{array}
$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^1 y^1 + \ldots + h^K y^K \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^K \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax \qquad\quad = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^h$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \in \mathbb{Z}^n, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

sendo $x \in \mathbb{Z}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^h$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Decomposição de Benders

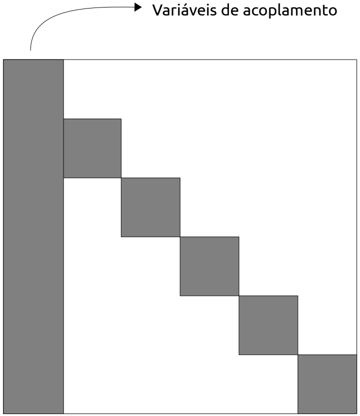
▷ Otimização linear discreta

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax \qquad\quad = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{Z}^p.
\end{aligned}
$$

sendo $x \in \mathbb{Z}^n$, $y \in \mathbb{Z}^p$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^h$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Problemas de grande-porte



Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax \qquad\quad = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^h$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

Para um dado $\bar{x} \geq 0$ t.q. $A\bar{x} = b$:

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

Para um dado $\bar{x} \geq 0$ t.q. $A\bar{x} = b$:

$$\begin{aligned} \min_{y} \quad & c^T\bar{x} + h^T y \\ \text{s.a} \quad & A\bar{x} = b, \\ & T\bar{x} + Dy = d, \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

Para um dado $\bar{x} \geq 0$ t.q. $A\bar{x} = b$:

$$
\begin{aligned}
c^T\bar{x} + \min_{y} \quad & h^T y \\
\text{s.a} \quad & b - A\bar{x}, \\
& Dy = d - T\bar{x}, \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

Para um dado $\bar{x} \geq 0$ t.q. $A\bar{x} = b$:

$$
\begin{array}{rc}
c^T\bar{x} + \min\limits_{y} & h^T y \\
\text{s.a} & b - A\bar{x}, \\
 & Dy = d - T\bar{x}, \\
 & y \geq 0
\end{array}
$$

$$\equiv c^T\bar{x} + \min_{y} \left\{ h^T y \mid Dy = d - T\bar{x}, y \geq 0 \right\}$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & Tx + Dy = d, \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \min_{x} \quad & \Big\{ c^T x + \min_{y} \left\{ h^T y \mid Dy = d - Tx, y \geq 0 \right\} \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& x \geq 0 \Big\}
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & Tx + Dy = d, \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min_{x} \quad & c^T x + \phi(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

com $\phi(x) = \min_{y} \left\{ h^T y \mid Dy = d - Tx, y \geq 0 \right\}$.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Para ser *equivalente* ao problema original, precisamos garantir que para qualquer x factível, exista $y \geq 0$ t.q. $Dy + Tx = d$;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Para ser *equivalente* ao problema original, precisamos garantir que para qualquer x factível, exista $y \geq 0$ t.q. $Dy + Tx = d$;
- Caso contrário, não temos como avaliar $\phi(x)$;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Para ser *equivalente* ao problema original, precisamos garantir que para qualquer x factível, exista $y \geq 0$ t.q. $Dy + Tx = d$;
- Caso contrário, não temos como avaliar $\phi(x)$;
- Como garantir isso, mantendo-se y apenas no subproblema interno?

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Para ser *equivalente* ao problema original, precisamos garantir que para qualquer x factível, exista $y \geq 0$ t.q. $Dy + Tx = d$;
- Caso contrário, não temos como avaliar $\phi(x)$;
- Como garantir isso, mantendo-se y apenas no subproblema interno?

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x + \phi(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

com $\phi(x) = \min_{y} \left\{ h^T y \mid Dy = d - Tx, y \geq 0 \right\}.$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Para ser *equivalente* ao problema original, precisamos garantir que para qualquer x factível, exista $y \geq 0$ t.q. $Dy + Tx = d$;
- Caso contrário, não temos como avaliar $\phi(x)$;
- Como garantir isso, mantendo-se y apenas no subproblema interno?

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & c^T x + \phi(x) \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

com $\phi(x) = \min\limits_{y} \left\{ h^T y \mid Dy = d - Tx, y \geq 0 \right\}$.

Obs.: Esse subproblema ou tem solução ótima ou é infactível.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Para ser *equivalente* ao problema original, precisamos garantir que para qualquer x factível, exista $y \geq 0$ t.q. $Dy + Tx = d$;
- Caso contrário, não temos como avaliar $\phi(x)$;
- Como garantir isso, mantendo-se y apenas no subproblema interno?

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & c^T x + \phi(x) \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

com $\phi(x) = \max_{p} \left\{ (d - Tx)^T p \mid D^T p \leq h \right\}.$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Para ser *equivalente* ao problema original, precisamos garantir que para qualquer x factível, exista $y \geq 0$ t.q. $Dy + Tx = d$;
- Caso contrário, não temos como avaliar $\phi(x)$;
- Como garantir isso, mantendo-se y apenas no subproblema interno?

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x + \phi(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

$$\text{com } \phi(x) = \max_{p} \left\{ (d - Tx)^T p \mid D^T p \leq h \right\}.$$

Obs.: Esse subproblema ou tem solução ótima ou é

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Para ser *equivalente* ao problema original, precisamos garantir que para qualquer x factível, exista $y \geq 0$ t.q. $Dy + Tx = d$;
- Caso contrário, não temos como avaliar $\phi(x)$;
- Como garantir isso, mantendo-se y apenas no subproblema interno?

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x + \phi(x) \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

com $\phi(x) = \max_{p} \left\{ (d - Tx)^T p \mid D^T p \leq h \right\}.$

Obs.: Esse subproblema ou tem solução ótima ou é ilimitado.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \left\{p \mid D^T p \leq h\right\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \left\{p \mid D^T p \leq h\right\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de índices de pontos extremos e raios extremos do problema dual;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de índices de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de índices de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
    1. O dual é ilimitado:

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \left\{ p \mid D^T p \leq h \right\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de índices de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \rightarrow \infty$ e, então, existe um

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de índices de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \to \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$,

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \left\{p \mid D^T p \leq h\right\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de índices de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \to \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$, ou seja $(d - T\bar{x})^T p_r^* > 0$.

Definições

▷ Raio e raio de subida

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$. O vetor $p_r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $p + \varepsilon p_r \in \mathcal{S}$, para todo $p \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.
  (ou seja: $D^T p_r \leq 0$, dado que $D^T(p + \varepsilon p_r) \leq h \; \forall \varepsilon \geq 0$)

Definições

▷ Raio e raio de subida

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$. O vetor $p_r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $p + \varepsilon p_r \in \mathcal{S}$, para todo $p \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$. (ou seja: $D^T p_r \leq 0$, dado que $D^T(p + \varepsilon p_r) \leq h \ \forall \varepsilon \geq 0$)

Definição: Raio de subida.

- Considere o poliedro $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ contendo um raio $p_r \in \mathcal{D}$. Se $(d - T\bar{x})^T(p + \varepsilon p_r) > (d - T\bar{x})^T p$, para todo $p \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$, então p_r é chamado de *raio de subida*. (ou seja: $(d - T\bar{x})^T p_r > 0$)

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \to \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$, ou seja $(d - T\bar{x})^T p_r^* > 0$.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \rightarrow \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$, ou seja $(d - T\bar{x})^T p_r^* > 0$. Isso significa que o subproblema original é

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \to \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$, ou seja $(d - T\bar{x})^T p_r^* > 0$. Isso significa que o subproblema original é infactível;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
    1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \rightarrow \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$, ou seja $(d - T\bar{x})^T p_r^* > 0$. Isso significa que o subproblema original é infactível; Para evitar isso, precisamos exigir que $(d - Tx)^T p_r^* \leq 0$ ao escolher x;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \to \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$, ou seja $(d - T\bar{x})^T p_r^* > 0$. Isso significa que o subproblema original é infactível; Para evitar isso, precisamos exigir que $(d - Tx)^T p_r^* \leq 0$ ao escolher x;
  2. O dual possui solução ótima:

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \to \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$, ou seja $(d - T\bar{x})^T p_r^* > 0$. Isso significa que o subproblema original é infactível; Para evitar isso, precisamos exigir que $(d - Tx)^T p_r^* \leq 0$ ao escolher x;
  2. O dual possui solução ótima: existe um ponto extremo ótimo p_q^*, $q \in Q$,

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear contínua

- Seja $\mathcal{D} = \{p \mid D^T p \leq h\}$ o conjunto de todas as soluções duais factíveis do subproblema;
- Vimos que podemos representar qualquer poliedro de forma equivalente por seus pontos e raios extremos;
- Sejam Q e R os conjuntos de pontos extremos e raios extremos do problema dual;
- Dada uma solução $\bar{x}$, temos duas situações:
  1. O dual é ilimitado: $\phi(\bar{x}) \to \infty$ e, então, existe um *raio extremo* de subida p_r^*, $r \in R$, ou seja $(d - T\bar{x})^T p_r^* > 0$. Isso significa que o subproblema original é infactível; Para evitar isso, precisamos exigir que $(d - Tx)^T p_r^* \leq 0$ ao escolher x;
  2. O dual possui solução ótima: existe um ponto extremo ótimo p_q^*, $q \in Q$, tal que $(d - T\bar{x})^T p_q^*$, é uma estimativa para $\phi(x)$;

Definições

▷ Lema de Farkas

- Outra forma de enxergar isso é recorrendo ao Lema de Farkas.

Teorema: Lema de Farkas. (Forma 2)

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \leq 0$ e $p^T b > 0$.

Definições

▷ Lema de Farkas

- Outra forma de enxergar isso é recorrendo ao Lema de Farkas.

Teorema: Lema de Farkas. (Forma 2)

- Sejam D uma matriz $m \times n$ e $(d - T\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $y \geq 0$ tal que $Dy = (d - T\bar{x})$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T D \leq 0$ e $p^T (d - T\bar{x}) > 0$.

Decomposição de Benders

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax \phantom{{}+Dy} = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

$$
\begin{array}{rl}
\not\equiv \min\limits_{x} & c^T x + \min\limits_{y} \left\{ h^T y \mid Dy = d - Tx, y \geq 0 \right\} \\
\text{s.a} & Ax = b, \\
 & \\
 & x \geq 0,
\end{array}
$$

Decomposição de Benders

$$
\begin{aligned}
\neq \min_{x} \quad & c^T x + \max_{p} \left\{ (d - Tx)^T p \mid D^T p \le h \right\} \\
\text{s.a} \quad & \qquad Ax = b, \\
& \\
& \qquad x \ge 0,
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

$$
\begin{aligned}
\equiv \min_{x} \quad & c^T x + \max_{p} \left\{ (d - Tx)^T p \mid D^T p \le h \right\} \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& (d - Tx)^T \bar{p}_r \le 0, \qquad \forall r \in R, \\
& x \ge 0,
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

$$
\begin{aligned}
\equiv \min_{x} \quad & c^T x + \max_{q \in Q} \left\{ (d - Tx)^T \bar{p}_q \right\} \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& (d - Tx)^T \bar{p}_r \leq 0, \qquad \forall r \in R, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

$$
\begin{aligned}
\equiv \min_{x} \quad & c^T x + v \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& (d - Tx)^T \bar{p}_r \leq 0, \qquad \forall r \in R, \\
& x \geq 0, \\
& v
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

$$
\begin{aligned}
\equiv \min_{x} \quad & c^T x + v \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& (d - Tx)^T \bar{p}_r \leq 0, && \forall r \in R, \\
& x \geq 0, \\
& v \geq (d - Tx)^T \bar{p}_q, && \forall q \in Q.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

▷ Problema Mestre de Benders (PMB)

$$
\begin{aligned}
\equiv \min_{x} \quad & c^T x + v \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& (d - Tx)^T \bar{p}_q \leq v, \qquad \forall q \in Q, \\
& (d - Tx)^T \bar{p}_r \leq 0, \qquad \forall r \in R, \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

▷ Equivalente ao problema original

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^h$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Decomposição de Benders

▷ Explorando a estrutura em blocos...

O desenvolvimento considerando os blocos individualmente é similar...

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^1 y^1 + \ldots + h^K y^K \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^K \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix}, \\
& x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Decomposição de Benders

▷ Problema Mestre de Benders (PMB)

$$
\begin{aligned}
\equiv \min_{x} \quad & c^T x + v^k \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& (d^k - T^k x)^T \bar{p}_q^k \le v^k, \qquad k = 1, \ldots, K, \quad \forall q \in Q^k, \\
& (d^k - T^k x)^T \bar{p}_r^k \le 0, \qquad k = 1, \ldots, K, \quad \forall r \in R^k, \\
& x \ge 0.
\end{aligned}
$$

sendo Q^k e R^k os conjuntos de índices de pontos extremos e raios extremos do k-ésimo subproblema

$$\phi_k(x) = \max_{p} \left\{ (d^k - T^k x)^T p \mid D^k p \le h^k \right\}, \; k = 1, \ldots, K.$$

Decomposição de Benders

▷ Método de planos de corte

- Assim como nas outras decomposições, o número de pontos e raios extremos é muito grande;

Decomposição de Benders

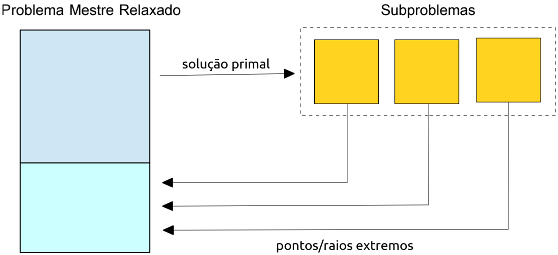
▷ Método de planos de corte

- Assim como nas outras decomposições, o número de pontos e raios extremos é muito grande;
- Portanto, usamos o método de planos de corte para gerar as restrições de forma iterativa.

Decomposição de Benders

▷ Método de planos de corte

- Assim como nas outras decomposições, o número de pontos e raios extremos é muito grande;
- Portanto, usamos o método de planos de corte para gerar as restrições de forma iterativa.



Decomposição de Benders

▷ Método de planos de corte

- Assim, trabalhamos com uma **relaxação** do PMB;

Decomposição de Benders

▷ Método de planos de corte

- Assim, trabalhamos com uma **relaxação** do PMB;
- O problema inicial, PMB^0 contém apenas as restrições $Ax = b$ e, possivelmente, os cortes correspondentes a um subconjunto de pontos/raios extremos já conhecidos;

Decomposição de Benders

▷ Método de planos de corte

- Assim, trabalhamos com uma **relaxação** do PMB;
- O problema inicial, PMB^0 contém apenas as restrições $Ax = b$ e, possivelmente, os cortes correspondentes a um subconjunto de pontos/raios extremos já conhecidos;
- Novos cortes são gerados iterativamente, recorrendo-se aos subproblemas;

Decomposição de Benders

▷ Método de planos de corte

- Assim, trabalhamos com uma **relaxação** do PMB;
- O problema inicial, PMB^0 contém apenas as restrições $Ax = b$ e, possivelmente, os cortes correspondentes a um subconjunto de pontos/raios extremos já conhecidos;
- Novos cortes são gerados iterativamente, recorrendo-se aos subproblemas;
- Em uma dada iteração k, o valor ótimo do PMB^k é um limitante inferior (LI) para o valor ótimo do problema original;

Decomposição de Benders

▷ Método de planos de corte

- Assim, trabalhamos com uma **relaxação** do PMB;
- O problema inicial, PMB^0 contém apenas as restrições $Ax = b$ e, possivelmente, os cortes correspondentes a um subconjunto de pontos/raios extremos já conhecidos;
- Novos cortes são gerados iterativamente, recorrendo-se aos subproblemas;
- Em uma dada iteração k, o valor ótimo do PMB^k é um limitante inferior (LI) para o valor ótimo do problema original;
- Dada uma solução $\bar{x}$ factível, temos que $c^T\bar{x} + \phi_1(\bar{x}) + \ldots + \phi_K(\bar{x})$ é um limitante superior (LS) para o valor ótimo do problema original. (ou seja: valor ótimo do PMB^k mais o valor ótimo do(s) subproblema(s))

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?