



Universidade Federal de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Produção



# Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022  
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 14.2: Decomposição de Benders: Exercício Resolvido

## Objetivos deste tópico

- ▶ Resolver um exercício aplicando a decomposição de Benders a um problema com estrutura em blocos e variáveis de acoplamento;
- ▶ Fixar os conceitos estudados por meio da resolução passo-a-passo do exercício;
- ▶ Conhecer um problema de programação estocástica dois-estágios e ver como resolver seu problema equivalente determinístico usando decomposição de Benders.

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

Uma fábrica produz dois tipos de itens, A e B, a partir do corte de placas de madeira. Dois tipos de placas podem ser comprados de um fornecedor contratado. A placa do tipo 1 tem um custo de R\$ 2/un. e seu corte resulta em 2 itens do tipo A e 3 itens do tipo B. Já a placa do tipo 2 tem um custo de R\$ 3/un. e seu corte resulta em 6 itens do tipo A e 3 itens do tipo B. As demandas dos itens A e B são 180 e 162 unidades, respect., e a capacidade máxima diária de processamento da máquina de corte é de 100 *placas*. Elabore um modelo de programação linear para determinar o quanto comprar de cada placa, de modo a atender a demanda de itens e minimizar o custo total.

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Modelo determinístico

$$\min \quad f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Modelo determinístico

$$\min \quad f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Modelo determinístico

$$\min \quad f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 180$$

$$3x_1 + 3x_2 \geq 162$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Modelo determinístico

$$\min \quad f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 180$$

$$3x_1 + 3x_2 \geq 162$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Modelo determinístico

$$\min \quad f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 180$$

$$3x_1 + 3x_2 \geq 162$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1^* = 36; x_2^* = 18; f(x^*) = 126$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

Uma fábrica produz dois tipos de itens, A e B, a partir do corte de placas de madeira. Dois tipos de placas podem ser comprados de um fornecedor contratado. A placa do tipo 1 tem um custo de R\$ 2/un. e seu corte resulta em 2 itens do tipo A e 3 itens do tipo B. Já a placa do tipo 2 tem um custo de R\$ 3/un. e seu corte resulta em 6 itens do tipo A e 3 itens do tipo B. ~~As demandas dos itens A e B são 180 e 162 unidades, respect., e~~ a capacidade máxima diária de processamento da máquina de corte é de 100 *placas*. Elabore um modelo de programação linear para determinar o quanto comprar de cada placa, de modo a atender a demanda de itens e minimizar o custo total.

**Na verdade, não se sabe ao certo qual será a demanda dos produtos!**

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Demandas incertas:  $d_1(\xi)$ ,  $d_2(\xi)$ , sendo  $\xi$  uma variável aleatória;

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Demandas incertas:  $d_1(\xi)$ ,  $d_2(\xi)$ , sendo  $\xi$  uma variável aleatória;
- ▶ Se a fábrica não puder atender a demanda devido à falta de matéria-prima, precisamos de algum **recurso**

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Demandas incertas:  $d_1(\xi)$ ,  $d_2(\xi)$ , sendo  $\xi$  uma variável aleatória;
- ▶ Se a fábrica não puder atender a demanda devido à falta de matéria-prima, precisamos de algum **recurso**: comprar os itens de outro fabricante, de modo a não deixar de atender a demanda.

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Demandas incertas:  $d_1(\xi)$ ,  $d_2(\xi)$ , sendo  $\xi$  uma variável aleatória;
- ▶ Se a fábrica não puder atender a demanda devido à falta de matéria-prima, precisamos de algum **recurso**: comprar os itens de outro fabricante, de modo a não deixar de atender a demanda.
- ▶ Outros dois fabricantes:

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Demandas incertas:  $d_1(\xi)$ ,  $d_2(\xi)$ , sendo  $\xi$  uma variável aleatória;
- ▶ Se a fábrica não puder atender a demanda devido à falta de matéria-prima, precisamos de algum **recurso**: comprar os itens de outro fabricante, de modo a não deixar de atender a demanda.
- ▶ Outros dois fabricantes: o fabricante 1 vende apenas o item A, a um preço de R\$ 9/un;

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Demandas incertas:  $d_1(\xi)$ ,  $d_2(\xi)$ , sendo  $\xi$  uma variável aleatória;
- ▶ Se a fábrica não puder atender a demanda devido à falta de matéria-prima, precisamos de algum **recurso**: comprar os itens de outro fabricante, de modo a não deixar de atender a demanda.
- ▶ Outros dois fabricantes: o fabricante 1 vende apenas o item A, a um preço de R\$ 9/un; O fabricante 2 faz venda “casada”: 1 un. do item A mais 2 un. do item B por R\$ 12;

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Demandas incertas:  $d_1(\xi)$ ,  $d_2(\xi)$ , sendo  $\xi$  uma variável aleatória;
- ▶ Se a fábrica não puder atender a demanda devido à falta de matéria-prima, precisamos de algum **recurso**: comprar os itens de outro fabricante, de modo a não deixar de atender a demanda.
- ▶ Outros dois fabricantes: o fabricante 1 vende apenas o item A, a um preço de R\$ 9/un; O fabricante 2 faz venda “casada”: 1 un. do item A mais 2 un. do item B por R\$ 12;
- ▶ Usamos *variáveis de recurso*  $y_1(\xi)$  e  $y_2(\xi)$  para expressar essa compra de itens no modelo;



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2$$

$$3x_1 + 3x_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2(\xi) \geq d_2(\xi)$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2(\xi) \geq d_2(\xi)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1(\xi) \geq 0, y_2(\xi) \geq 0$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 \quad + 9y_1(\xi) + 12y_2(\xi)$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2(\xi) \geq d_2(\xi)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1(\xi) \geq 0, y_2(\xi) \geq 0$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + E_{\xi}[ + 9y_1(\xi) + 12y_2(\xi)]$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2(\xi) \geq d_2(\xi)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1(\xi) \geq 0, y_2(\xi) \geq 0$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + E_{\xi}[ + 9y_1(\xi) + 12y_2(\xi)]$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2(\xi) \geq d_2(\xi)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1(\xi) \geq 0, y_2(\xi) \geq 0$$

- ▶  $x$ : variáveis de primeiro estágio;

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + E_{\xi}[+9y_1(\xi) + 12y_2(\xi)]$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2(\xi) \geq d_2(\xi)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1(\xi) \geq 0, y_2(\xi) \geq 0$$

- ▶  $x$ : variáveis de primeiro estágio;
- ▶  $y$ : variáveis de recurso (segundo estágio).

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + E_{\xi}[+9y_1(\xi) + 12y_2(\xi)]$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2(\xi) \geq d_2(\xi)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1(\xi) \geq 0, y_2(\xi) \geq 0$$

- ▶  $x$ : variáveis de primeiro estágio;
- ▶  $y$ : variáveis de recurso (segundo estágio).
- ▶ Não temos mais um problema de programação linear :(

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Usando uma distribuição discreta finita, podemos expressar a realização da variável aleatória por meio de cenários;

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Usando uma distribuição discreta finita, podemos expressar a realização da variável aleatória por meio de cenários;
- ▶ Por simplicidade, vamos considerar dois cenários:

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Usando uma distribuição discreta finita, podemos expressar a realização da variável aleatória por meio de cenários;
- ▶ Por simplicidade, vamos considerar dois cenários:
  1.  $d^1 = (d_1^1, d_2^1) = (184, 146)$ , com probabilidade  $p^1 = 1/3$ ;

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Usando uma distribuição discreta finita, podemos expressar a realização da variável aleatória por meio de cenários;
- ▶ Por simplicidade, vamos considerar dois cenários:
  1.  $d^1 = (d_1^1, d_2^1) = (184, 146)$ , com probabilidade  $p^1 = 1/3$ ;
  2.  $d^2 = (d_1^2, d_2^2) = (186, 160)$ , com probabilidade  $p^2 = 2/3$ .

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

- ▶ Usando uma distribuição discreta finita, podemos expressar a realização da variável aleatória por meio de cenários;
- ▶ Por simplicidade, vamos considerar dois cenários:
  1.  $d^1 = (d_1^1, d_2^1) = (184, 146)$ , com probabilidade  $p^1 = 1/3$ ;
  2.  $d^2 = (d_1^2, d_2^2) = (186, 160)$ , com probabilidade  $p^2 = 2/3$ .
- ▶ Com isso, podemos obter um problema de programação linear, conhecido como *Problema Equivalente Determinístico*.



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + E_{\xi}[ + 9y_1(\xi) + 12y_2(\xi) ]$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1(\xi) + y_2(\xi) \geq d_1(\xi)$$

$$3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2(\xi) \geq d_2(\xi)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1(\xi) \geq 0, y_2(\xi) \geq 0$$

- ▶  $x$ : variáveis de primeiro estágio;
- ▶  $y$ : variáveis de recurso (segundo estágio).

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \end{array}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 \\ & 3x_1 + 3x_2 \end{array}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 \\ & 3x_1 + 3x_2 \quad + 2y_2^1 \end{array}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 & & \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 & & \geq 184 \\ & 3x_1 + 3x_2 & + 2y_2^1 & \geq 146 \end{array}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 & & \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 & & \geq 184 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^1 & & \geq 146 \\ & 2x_1 + 6x_2 & & \\ & 3x_1 + 3x_2 & & \end{array}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 & & \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 & & \geq 184 \\ & 3x_1 + 3x_2 & + 2y_2^1 & \geq 146 \\ & 2x_1 + 6x_2 & & + y_1^2 + y_2^2 \\ & 3x_1 + 3x_2 & & + 2y_2^2 \end{array}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{llll} \min & 2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 & & \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 & & \geq 184 \\ & 3x_1 + 3x_2 & + 2y_2^1 & \geq 146 \\ & 2x_1 + 6x_2 & + y_1^2 + y_2^2 & \geq 186 \\ & 3x_1 + 3x_2 & + 2y_2^2 & \geq 160 \end{array}$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 \geq 184 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^1 \geq 146 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 186 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^2 \geq 160 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0, y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0 \end{array}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 3y_1^1 + 4y_2^1 \\ \text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 \geq 184 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^1 \geq 146 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 186 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^2 \geq 160 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0, y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + 3y_1^1 + 4y_2^1 + 6y_1^2 + 8y_2^2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 \geq 184$$

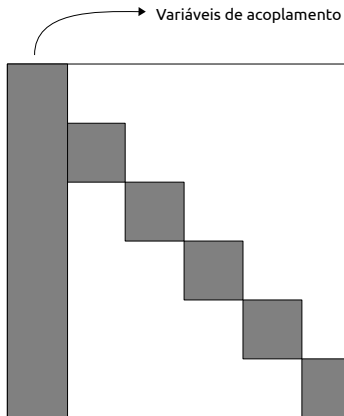
$$3x_1 + 3x_2 + 2y_2^1 \geq 146$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 186$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2y_2^2 \geq 160$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0, y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0$$

# Problemas de grande-porte



## Problemas de programação estocástica dois-estágios

### ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 + 3y_1^1 + 4y_2^1 + 6y_1^2 + 8y_2^2 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 \geq 184 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^1 \geq 146 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 186 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^2 \geq 160 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0, y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0 \end{array}$$

- ▶ Reformule o modelo usando Decomposição de Benders e resolva-o pelo método de planos de corte.

# Decomposição de Benders

## ▷ Otimização linear contínua

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & Tx + Dy = d, \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $d \in \mathbb{R}^h$

$$D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}$$

# Decomposição de Benders

## ▷ Otimização linear contínua

$$\begin{array}{ll}
 \min_{x,y} & c^T x + h^1 y^1 + \dots + h^K y^K \\
 \text{s.a} & Ax = b, \\
 & x \geq 0, y \geq 0.
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ \vdots \\ T^K \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^K \end{bmatrix},$$

# Decomposição de Benders

## ▷ Otimização linear contínua

$$\begin{aligned}
 &\equiv \min_x && c^T x + v^k \\
 &\text{s.a} && Ax = b, \\
 &&& (d^k - T^k x)^T \bar{p}_q^k \leq v^k, \quad k = 1, \dots, K, \quad \forall q \in Q^k, \\
 &&& (d^k - T^k x)^T \bar{p}_r^k \leq 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad \forall r \in R^k, \\
 &&& x \geq 0.
 \end{aligned}$$

sendo  $Q^k$  e  $R^k$  os conjuntos de índices de pontos extremos  
e raios extremos do  $k$ -ésimo subproblema

$$\phi_k(x) = \max_p \left\{ (d^k - T^k x)^T p \mid D^k p \leq h^k \right\}, \quad k = 1, \dots, K.$$



## Problemas de programação estocástica dois-estágios

### ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + 3y_1^1 + 4y_2^1 + 6y_1^2 + 8y_2^2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 \geq 184$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2y_2^1 \geq 146$$

$$2x_1 + 6x_2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 186$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2y_2^2 \geq 160$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0, y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0$$

- ▶ Reformule o modelo usando Decomposição de Benders e resolva-o pelo método de planos de corte.

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Decomposição de Benders

Subproblemas:

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Decomposição de Benders

Subproblemas:

$$\begin{aligned} (SP_1) \quad & \phi_1(\bar{x}) = \min 3y_1^1 + 4y_2^1 \\ \text{s.a} \quad & y_1^1 + y_2^1 \geq 184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2) \\ & +2y_2^1 \geq 146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2) \\ & y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Decomposição de Benders

Subproblemas:

$$\begin{aligned} (SP_1) \quad & \phi_1(\bar{x}) = \min 3y_1^1 + 4y_2^1 \\ \text{s.a} \quad & y_1^1 + y_2^1 \geq 184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2) \\ & +2y_2^1 \geq 146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2) \\ & y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (SP_2) \quad & \phi_2(\bar{x}) = \min 6y_1^2 + 8y_2^2 \\ \text{s.a} \quad & y_1^2 + y_2^2 \geq 186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2) \\ & +2y_2^2 \geq 160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2) \\ & y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Decomposição de Benders

Subproblemas:

$$(SP_1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \min 3y_1^1 + 4y_2^1$$

$$\text{s.a. } y_1^1 + y_2^1 \geq 184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)$$

$$+2y_2^1 \geq 146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)$$

$$y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0.$$

$$(SP_2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \min 6y_1^2 + 8y_2^2$$

$$\text{s.a. } y_1^2 + y_2^2 \geq 186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)$$

$$+2y_2^2 \geq 160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)$$

$$y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0.$$

Formulações duais:

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Decomposição de Benders

Subproblemas:

$$(SP_1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \min 3y_1^1 + 4y_2^1$$

$$\text{s.a.} \quad y_1^1 + y_2^1 \geq 184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)$$

$$+ 2y_2^1 \geq 146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)$$

$$y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0.$$

$$(SP_2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \min 6y_1^2 + 8y_2^2$$

$$\text{s.a.} \quad y_1^2 + y_2^2 \geq 186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)$$

$$+ 2y_2^2 \geq 160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)$$

$$y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0.$$

Formulações duais:

$$(SP_1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1$$

$$+ [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2$$

$$\text{s.a.} \quad p_1 + \quad \leq 3$$

$$p_1 + 2p_2 \leq 4$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Decomposição de Benders

Subproblemas:

$$(SP_1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \min 3y_1^1 + 4y_2^1$$

$$\text{s.a.} \quad y_1^1 + y_2^1 \geq 184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)$$

$$+ 2y_2^1 \geq 146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)$$

$$y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0.$$

$$(SP_2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \min 6y_1^2 + 8y_2^2$$

$$\text{s.a.} \quad y_1^2 + y_2^2 \geq 186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)$$

$$+ 2y_2^2 \geq 160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)$$

$$y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0.$$

Formulações duais:

$$(SP_1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1$$

$$+ [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2$$

$$\text{s.a.} \quad p_1 + \quad \leq 3$$

$$p_1 + 2p_2 \leq 4$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.$$

$$(SP_2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1$$

$$+ [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2$$

$$\text{s.a.} \quad p_1 + \quad \leq 6$$

$$p_1 + 2p_2 \leq 8$$

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

Problema Mestre de Benders inicial

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^0) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (0, 0); \quad \bar{v} = (0, 0);$$

$$LI = f(\bar{x}, \bar{v}) = 0; \quad LS = \infty$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned} (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\ & + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + p_2 \leq 3 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & \quad [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 & \quad + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & \quad p_1 + \quad \leq 3 \\
 & \quad p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 625$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + p_2 \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 625 > \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 625 > \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\phi_1(x)\bar{p} \leq v_1$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 625 > \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x)\bar{p} &\leq v_1 \\
 (184 - 2x_1 - 6x_2)3 &+ \\
 (146 - 3x_1 - 3x_2)0.5 &\leq v_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 625 > \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 625 > \bar{v}_1$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x)\bar{p} &\leq v_1 \\
 (184 - 2x_1 - 6x_2)3 &+ \\
 (146 - 3x_1 - 3x_2)0.5 &\leq v_1 \\
 552 - 6x_1 - 18x_2 + 73 - 1.5x_1 - 1.5x_2 &\leq v_1
 \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 625 > \bar{v}_1$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x)\bar{p} &\leq v_1 \\
 (184 - 2x_1 - 6x_2)3 &+ \\
 (146 - 3x_1 - 3x_2)0.5 &\leq v_1 \\
 552 - 6x_1 - 18x_2 + 73 - 1.5x_1 - 1.5x_2 &\leq v_1 \\
 625 - 7.5x_1 - 19.5x_2 &\leq v_1
 \end{aligned}$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_1^0) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [146 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 625 > \bar{v}_1$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x)\bar{p} &\leq v_1 \\
 (184 - 2x_1 - 6x_2)3 &+ \\
 (146 - 3x_1 - 3x_2)0.5 &\leq v_1 \\
 552 - 6x_1 - 18x_2 + 73 - 1.5x_1 - 1.5x_2 &\leq v_1 \\
 625 - 7.5x_1 - 19.5x_2 &\leq v_1 \\
 \Rightarrow v_1 + 7.5x_1 + 19.5x_2 &\geq 625
 \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned} (SP_2^0) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\ & + [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + p_2 \leq 6 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_2^0) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & \quad [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 & \quad + [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & \quad p_1 + \quad \leq 6 \\
 & \quad p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 1276$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_2^0) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & \quad [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 & \quad + [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & \quad p_1 + \quad \leq 6 \\
 & \quad p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 1276 > \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_2^0) \quad \phi_2(\bar{x}) &= \max [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + p_2 \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 1276 > \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_2^0) \quad \phi_2(\bar{x}) &= \max [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\phi_2(x)\bar{p} \leq v_2$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 1276 > \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_2^0) \quad \phi_2(\bar{x}) &= \max [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x)\bar{p} &\leq v_2 \\
 186 - 2x_1 - 6x_2 &+ \\
 (160 - 3x_1 - 3x_2)1 &\leq v_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 1276 > \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_2^0) \quad \phi_2(\bar{x}) &= \max [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 1276 > \bar{v}_2$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x)\bar{p} &\leq v_2 \\
 186 - 2x_1 - 6x_2 &+ \\
 (160 - 3x_1 - 3x_2) &\leq v_2 \\
 1276 - 15x_1 - 39x_2 &\leq v_2
 \end{aligned}$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 0

$$\begin{aligned}
 (SP_2^0) \quad \phi_2(\bar{x}) &= \max [186 - (2\bar{x}_1 + 6\bar{x}_2)]p_1 \\
 &\quad + [160 - (3\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + p_2 \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 1276 > \bar{v}_2$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x)\bar{p} &\leq v_2 \\
 186 - 2x_1 - 6x_2 &+ \\
 (160 - 3x_1 - 3x_2) &\leq v_2 \\
 1276 - 15x_1 - 39x_2 &\leq v_2 \\
 \Rightarrow v_2 + 15x_1 + 39x_2 &\geq 1276
 \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

### Problema Mestre de Benders

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^1) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & && 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

### Problema Mestre de Benders

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^1) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & && 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (0, 32.7179); \quad \bar{v} = (0, 0)$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

### Problema Mestre de Benders

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^1) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & && 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (0, 32.7179); \quad \bar{v} = (0, 0)$$

$$LI = f(\bar{x}, \bar{v}) = 98.1538;$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

### Problema Mestre de Benders

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^1) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & && 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (0, 32.7179); \quad \bar{v} = (0, 0)$$

$$LI = f(\bar{x}, \bar{v}) = 98.1538; \quad LS = 0 + 625 + 1276 = 1901$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned} (SP_1^1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & [184 - 6(32.7179)]p_1 \\ & + [146 - 3(32.7179)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned} (SP_1^1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & [184 - 6(32.7179)]p_1 \\ & + [146 - 3(32.7179)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 95.6926$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned} (SP_1^1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & [184 - 6(32.7179)]p_1 \\ & + [146 - 3(32.7179)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 95.6926 > \bar{v}_1$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_1^1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & \quad [184 - 6(32.7179)]p_1 \\
 & \quad + [146 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & \quad p_1 + \quad \leq 3 \\
 & \quad p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 95.6926 > \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_1^1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & [184 - 6(32.7179)]p_1 \\
 & + [146 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\phi_1(x)\bar{p} \leq v_1$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 95.6926 > \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_1^1) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & [184 - 6(32.7179)]p_1 \\
 & + [146 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x)\bar{p} &\leq v_1 \\
 (184 - 2x_1 - 6x_2)0 &+ \\
 (146 - 3x_1 - 3x_2)2 &\leq v_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 95.6926 > \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_1^1) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - 6(32.7179)]p_1 \\
 &\quad + [146 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x)\bar{p} &\leq v_1 \\
 (184 - 2x_1 - 6x_2)0 + \\
 (146 - 3x_1 - 3x_2)2 &\leq v_1 \\
 292 - 6x_1 - 6x_2 &\leq v_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 95.6926 > \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_1^1) \quad \phi_1(\bar{x}) &= \max [184 - 6(32.7179)]p_1 \\
 &\quad + [146 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 95.6926 > \bar{v}_1$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_1(x)\bar{p} &\leq v_1 \\
 (184 - 2x_1 - 6x_2)0 + \\
 (146 - 3x_1 - 3x_2)2 &\leq v_1 \\
 292 - 6x_1 - 6x_2 &\leq v_1 \\
 \Rightarrow v_1 + 6x_1 + 6x_2 &\geq 292
 \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned} (SP_2^1) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & [186 - 6(32.7179)]p_1 \\ & + [160 - 3(32.7179)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned} (SP_2^1) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & [186 - 6(32.7179)]p_1 \\ & + [160 - 3(32.7179)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 247.385$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned} (SP_2^1) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & [186 - 6(32.7179)]p_1 \\ & + [160 - 3(32.7179)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 247.385 > \bar{v}_2$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_2^1) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & \quad [186 - 6(32.7179)]p_1 \\
 & \quad + [160 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & \quad p_1 + \quad \leq 6 \\
 & \quad p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & \quad p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 247.385 > \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_2^1) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & [186 - 6(32.7179)]p_1 \\
 & + [160 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\phi_2(x)\bar{p} \leq v_2$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 247.385 > \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_1^1) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max & [186 - 6(32.7179)]p_1 \\
 & + [160 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x)\bar{p} &\leq v_2 \\
 (186 - 2x_1 - 6x_2)0 &+ \\
 (160 - 3x_1 - 3x_2)4 &\leq v_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 247.385 > \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_2^1) \quad \phi_2(\bar{x}) &= \max [186 - 6(32.7179)]p_1 \\
 &\quad + [160 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x)\bar{p} &\leq v_2 \\
 (186 - 2x_1 - 6x_2)0 + \\
 (160 - 3x_1 - 3x_2)4 &\leq v_2 \\
 640 - 12x_1 - 12x_2 &\leq v_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 247.385 > \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 1

$$\begin{aligned}
 (SP_1^2) \quad \phi_2(\bar{x}) &= \max [186 - 6(32.7179)]p_1 \\
 &\quad + [160 - 3(32.7179)]p_2 \\
 \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 6 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 8 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 247.385 > \bar{v}_2$$

Um novo corte deve ser inserido:

$$\begin{aligned}
 \phi_2(x)\bar{p} &\leq v_2 \\
 (186 - 2x_1 - 6x_2)0 + \\
 (160 - 3x_1 - 3x_2)4 &\leq v_2 \\
 640 - 12x_1 - 12x_2 &\leq v_2 \\
 \Rightarrow v_2 + 12x_1 + 12x_2 &\geq 640
 \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

### Problema Mestre de Benders

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^2) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & && 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & && 6x_1 + 6x_2 + v_1 \geq 292 \\ & && 12x_1 + 12x_2 + v_2 \geq 640 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

### Problema Mestre de Benders

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^2) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & && 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & && 6x_1 + 6x_2 + v_1 \geq 292 \\ & && 12x_1 + 12x_2 + v_2 \geq 640 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (33.5, 19.8333); \quad \bar{v} = (0, 0)$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

### Problema Mestre de Benders

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^2) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & && 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & && 6x_1 + 6x_2 + v_1 \geq 292 \\ & && 12x_1 + 12x_2 + v_2 \geq 640 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (33.5, 19.8333); \quad \bar{v} = (0, 0)$$

$$LI = f(\bar{x}, \bar{v}) = 126.5;$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

### Problema Mestre de Benders

$$\begin{aligned} (\text{PMB}^2) \quad \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ \text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & 6x_1 + 6x_2 + v_1 \geq 292 \\ & 12x_1 + 12x_2 + v_2 \geq 640 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = (33.5, 19.8333); \quad \bar{v} = (0, 0)$$

$$LI = f(\bar{x}, \bar{v}) = 126.5; \quad LS = 98.1538 + 95.6926 + 247.385 = 441.2314$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$\begin{aligned} (SP_1^2) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max & [184 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ & + [146 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + \quad \leq 3 \\ & p_1 + 2p_2 \leq 4 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_1^2) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max [184 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [146 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + \quad &\leq 3 \\ p_1 + 2p_2 &\leq 4 \\ p_1 \geq 0, p_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 0$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_1^2) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max [184 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [146 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + \quad &\leq 3 \\ p_1 + 2p_2 &\leq 4 \\ p_1 \geq 0, p_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 0 = \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_1^2) \quad \phi_1(\bar{x}) = \max [184 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [146 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + & \leq 3 \\ p_1 + 2p_2 & \leq 4 \\ p_1 \geq 0, p_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Nenhum corte a ser inserido!

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_1(\bar{x}) = 0 = \bar{v}_1$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_2^2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max [186 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [160 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + & \leq 6 \\ p_1 + 2p_2 & \leq 8 \\ p_1 \geq 0, p_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_2^2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max [186 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [160 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + & \leq 6 \\ p_1 + 2p_2 & \leq 8 \\ p_1 \geq 0, p_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 0$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_2^2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max [186 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [160 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + & \leq 6 \\ p_1 + 2p_2 & \leq 8 \\ p_1 \geq 0, p_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 0 = \bar{v}_2$$



# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_2^2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max [186 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [160 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + & \leq 6 \\ p_1 + 2p_2 & \leq 8 \\ p_1 \geq 0, p_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Nenhum corte a ser inserido!

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 0 = \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_2^2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max [186 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [160 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + & \leq 6 \\ p_1 + 2p_2 & \leq 8 \\ p_1 \geq 0, p_2 & \geq 0. \end{aligned}$$

Nenhum corte a ser inserido!

**Solução ótima encontrada**

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 0 = \bar{v}_2$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Iteração 2

$$(SP_2^2) \quad \phi_2(\bar{x}) = \max [186 - 2(33.5) - 6(19.8333)]p_1 \\ + [160 - 3(33.5) - 3(19.8333)]p_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} p_1 + \quad &\leq 6 \\ p_1 + 2p_2 &\leq 8 \\ p_1 \geq 0, p_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_2(\bar{x}) = 0 = \bar{v}_2$$

Nenhum corte a ser inserido!

**Solução ótima encontrada**

$$x^* = (33.5, 19.8333)$$

$$f^* = 126.5$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: PMB ótimo!

Problema Mestre de Benders ótimo

$$\begin{aligned}(\text{PMB}^2) \quad & \min && 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ & \text{s.a} && 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & && 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & && 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & && 6x_1 + 6x_2 + v_1 \geq 292 \\ & && 12x_1 + 12x_2 + v_2 \geq 640 \\ & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{x}^* = (33.5, 19.8333); \quad \bar{v}^* = (0, 0)$$

$$LI = f(\bar{x}, \bar{v}) = 126.5; \quad LS = 126.5$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Problema equivalente determinístico

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 3y_1^1 + 4y_2^1 + 6y_1^2 + 8y_2^2 \\ \text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 \geq 184 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^1 \geq 146 \\ & 2x_1 + 6x_2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 186 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^2 \geq 160 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0, y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0 \\ & x_1^* = 33.5; x_2^* = 19.8333; f(x^*) = 126.5 \end{aligned}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Exercício 1: Modelo determinístico

$$\min \quad f(x) = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad 1x_1 + 1x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 180$$

$$3x_1 + 3x_2 \geq 162$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1^* = 36; x_2^* = 18; f(x^*) = 126$$

## Problemas de programação estocástica dois-estágios

### ▷ Uma pergunta...

- ▶ O que acontece se obtermos o dual desse problema e aplicarmos Decomposição de Dantzig-Wolfe nesse dual?

$$\begin{array}{ll}
 \min & 2x_1 + 3x_2 + 3y_1^1 + 4y_2^1 + 6y_1^2 + 8y_2^2 \\
 \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\
 & 2x_1 + 6x_2 + y_1^1 + y_2^1 \geq 184 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^1 \geq 146 \\
 & 2x_1 + 6x_2 + y_1^2 + y_2^2 \geq 186 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + 2y_2^2 \geq 160 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1^1 \geq 0, y_2^1 \geq 0, y_1^2 \geq 0, y_2^2 \geq 0
 \end{array}$$

# Problemas de programação estocástica dois-estágios

## ▷ Perspectiva dual

- ▶ O Problema Mestre Restrito ótimo da Geração de Colunas vai ser o **dual** do Problema Mestre de Benders ótimo!

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 + v_1 + v_2 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 \leq 100 \\ & 7.5x_1 + 19.5x_2 + v_1 \geq 625 \\ & 15x_1 + 39x_2 + v_2 \geq 1276 \\ & 6x_1 + 6x_2 + v_1 \geq 292 \\ & 12x_1 + 12x_2 + v_2 \geq 640 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, v_1 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{array}$$



- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?