Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 14.3: Decomposição de Benders em Otimização Discreta

Objetivos deste tópico

- Entender como aplicar a decomposição de Benders em problemas de Otimização Discreta;
- Ver alguns exemplos de trabalhos usando essa abordagem.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

Caso 1: Subproblema com variáveis contínuas apenas

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

Caso 1: Subproblema com variáveis contínuas apenas

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & Tx + Dy = d, \\ & x \in \mathbb{Z}^n, y \geq 0. \end{aligned}$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

Caso 1: Subproblema com variáveis contínuas apenas

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & Tx + Dy = d, \\ & x \in \mathbb{Z}^n, y \geq 0. \end{aligned}$$

sendo $y \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^h$

$$D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

$$
\begin{aligned}
\equiv \min_{x} \quad & c^T x + v^k \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& (d^k - T^k x)^T \bar{p}_q^k \leq v^k, \qquad k = 1, \ldots, K, \;\; \forall q \in Q^k, \\
& (d^k - T^k x)^T \bar{p}_r^k \leq 0, \qquad k = 1, \ldots, K, \;\; \forall r \in R^k, \\
& x \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

sendo Q^k e R^k os conjuntos de índices de pontos extremos e raios extremos do k-ésimo subproblema

$$\phi_k(x) = \max_{p} \left\{ (d^k - T^k x)^T p \mid D^k p \leq h^k \right\}, \; k = 1, \ldots, K.$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*):

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*): resolve-se cada PMB com as restrições de integralidade, usando um software de programação inteira.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*): resolve-se cada PMB com as restrições de integralidade, usando um software de programação inteira. Nesse caso, resolver o PMB pode se tornar demorado com o aumento do número de cortes gerados, podendo ficar inviável.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*): resolve-se cada PMB com as restrições de integralidade, usando um software de programação inteira. Nesse caso, resolver o PMB pode se tornar demorado com o aumento do número de cortes gerados, podendo ficar inviável.
- *Branch-and-Benders-cut (BBC)*: o método de plano de cortes é combinado com o método branch-and-bound.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*): resolve-se cada PMB com as restrições de integralidade, usando um software de programação inteira. Nesse caso, resolver o PMB pode se tornar demorado com o aumento do número de cortes gerados, podendo ficar inviável.
- *Branch-and-Benders-cut (BBC)*: o método de plano de cortes é combinado com o método branch-and-bound. Em cada nó, os cortes são gerados resolvendo-se a relaxação linear do PMB.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*): resolve-se cada PMB com as restrições de integralidade, usando um software de programação inteira. Nesse caso, resolver o PMB pode se tornar demorado com o aumento do número de cortes gerados, podendo ficar inviável.
- *Branch-and-Benders-cut (BBC)*: o método de plano de cortes é combinado com o método branch-and-bound. Em cada nó, os cortes são gerados resolvendo-se a relaxação linear do PMB. De acordo com algum critério de parada, o método de planos de corte é interrompido e ramifica-se

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*): resolve-se cada PMB com as restrições de integralidade, usando um software de programação inteira. Nesse caso, resolver o PMB pode se tornar demorado com o aumento do número de cortes gerados, podendo ficar inviável.
- *Branch-and-Benders-cut (BBC)*: o método de plano de cortes é combinado com o método branch-and-bound. Em cada nó, os cortes são gerados resolvendo-se a relaxação linear do PMB. De acordo com algum critério de parada, o método de planos de corte é interrompido e ramifica-se (por exemplo, em alguma componente x_i com valor fracionário, criando-se dois novos nós tal que $x_i = 0$ em um deles e $x_i = 1$ no outro).

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*): resolve-se cada PMB com as restrições de integralidade, usando um software de programação inteira. Nesse caso, resolver o PMB pode se tornar demorado com o aumento do número de cortes gerados, podendo ficar inviável.
- *Branch-and-Benders-cut (BBC)*: o método de plano de cortes é combinado com o método branch-and-bound. Em cada nó, os cortes são gerados resolvendo-se a relaxação linear do PMB. De acordo com algum critério de parada, o método de planos de corte é interrompido e ramifica-se (por exemplo, em alguma componente x_i com valor fracionário, criando-se dois novos nós tal que $x_i = 0$ em um deles e $x_i = 1$ no outro). Em geral, é a forma mais eficiente de se implementar,

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- Estratégia simples (*naive*): resolve-se cada PMB com as restrições de integralidade, usando um software de programação inteira. Nesse caso, resolver o PMB pode se tornar demorado com o aumento do número de cortes gerados, podendo ficar inviável.
- *Branch-and-Benders-cut (BBC)*: o método de plano de cortes é combinado com o método branch-and-bound. Em cada nó, os cortes são gerados resolvendo-se a relaxação linear do PMB. De acordo com algum critério de parada, o método de planos de corte é interrompido e ramifica-se (por exemplo, em alguma componente x_i com valor fracionário, criando-se dois novos nós tal que $x_i = 0$ em um deles e $x_i = 1$ no outro). Em geral, é a forma mais eficiente de se implementar, principalmente se funções do tipo *callback* são usadas (*p. ex.* ver documentação CPLEX).

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- A partir de sua versão 12.7, o software CPLEX possui uma Decomposição de Benders de propósito geral:

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

- A partir de sua versão 12.7, o software CPLEX possui uma Decomposição de Benders de propósito geral:
  "*CPLEX V12.7.0 implements Benders decomposition algorithm. In particular, given a formulation of a problem, CPLEX V12.7.0 can decompose the model into a single master and (possibly multiple) subproblems. To do so, CPLEX can make use of* **annotations** *that you supply for your model. The strategy can be applied to mixed-integer linear programs (MILP). For certain types of problems, this approach can offer significant performance improvements.*"
  `https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.7.0/ilog.odms.cplex.help/CPLEX/ReleaseNotes/topics/releasenotes127/newBenders.html`

Decomposição de Benders

▷ Benders, 1962

Numerische Mathematik 4, 238—252 (1962)

Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems*

By

J. F. BENDERS**

I. Introduction

In this paper two slightly different procedures are presented for solving mixed-variables programming problems of the type

$$\max\{c^T x + f(y) \mid A\,x + F(y) \leqq b,\ x \in R_p,\ y \in S\}, \tag{1.1}$$

where $x \in R_p$ (the p-dimensional Euclidean space), $y \in R_q$, and S is an arbitrary subset of R_q. Furthermore, A is an (m, p) matrix, $f(y)$ is a scalar function and $F(y)$ an m-component vector function both defined on S, and b and c are fixed vectors in R_m and R_p, respectively.

An example is the mixed-integer programming problem in which certain variables may assume any value on a given interval, whereas others are restricted to integral values only. In this case S is a set of vectors in R_q with integral-valued components. Various methods for solving this problem have

Decomposição de Benders

▷ Benders, 1962

integral-valued components. Various methods for solving this problem have been proposed by BEALE [1], GOMORY [9] and LAND and DOIG [11]. The use of integer variables, in particular for incorporating in the programming problem a choice from a set of alternative discrete decisions, has been discussed by DANTZIG [4].

Other examples are those in which certain variables occur in a linear and others in a non-linear fashion in the formulation of the problem (see e.g. GRIFFITH and STEWART [7]). In such cases $f(y)$ or some of the components of $F(y)$ are non-linear functions defined on a suitable subset S of R_q.

Obviously, after an arbitrary partitioning of the variables into two mutually exclusive subsets, any linear programming problem can be considered as being of type (1.1). This may be advantageous if the structure of the problem indicates a natural partitioning of the variables. This happens, for instance, if the problem is actually a combination of a general linear programming and a transportation problem. Or, if the matrix shows a block structure, the blocks being linked only by some columns, to which also many other block structures can easily be reduced. A method of solution for linear programming problems efficiently utilizing such block structures, has been designed by DANTZIG and WOLFE [5].

The basic idea behind the procedures to be described in this report is a partitioning of the given problem (1.1) into two sub problems; a programming

---

* Paper presented to the 8th International Meeting of the Institute of Management Sciences, Brussels, August 23—26, 1961.

** Koninklijke/Shell-Laboratorium, Amsterdam (Shell Internationale Research Maatschappij N.V.).

Método L-shaped

▷ van Slyke and Wets, 1969

SIAM J. Appl. Math.
Vol. 17, No. 4, July 1969

L-SHAPED LINEAR PROGRAMS WITH APPLICATIONS TO OPTIMAL CONTROL AND STOCHASTIC PROGRAMMING*

R. M. VAN SLYKE† AND ROGER WETS‡

Abstract. This paper gives an algorithm for *L*-shaped linear programs which arise naturally in optimal control problems with state constraints and stochastic linear programs (which can be represented in this form with an infinite number of linear constraints). The first section describes a cutting hyperplane algorithm which is shown to be equivalent to a partial decomposition algorithm of the dual program. The two last sections are devoted to applications of the cutting hyperplane algorithm to a linear optimal control problem and stochastic programming problems.

1. Introduction. It has been observed by many authors (see, e.g., Barr [2], Gilbert [12], Rosen [21], [22], Neustadt [18], Whalen [29], [30], Zadeh [31], Pshenichniy [19]) that the techniques of mathematical programming can be utilized to solve optimal control problems. The usual approach (although others are possible, e.g., Dantzig [6], Van Slyke [23]) is to discretize the system either by finite difference approximations or by considering the system in sample data mode. If the system dynamics are linear and there are no state space constraints, various devices [6], [23] of mathematical programming can be used so that the grid size or number of sample points in the sample mode does not affect the number of equations in the associated mathematical program. This is desirable

Método L-shaped

▷ van Slyke and Wets, 1969

must be added to the problem to determine the set of feasible decisions. However, the characterization of the feasibility region given in [27] is not very constructive. The algorithm developed here generates these linear constraints systematically and generates only those which are violated by some optimal decision candidate, in much the same way as in the control problem with state space constraints.

The stochastic programming problem differs from the linear optimal control problem in that there is a cost associated with the recourse actions which must be accounted for. Dantzig and Madansky [7] suggest sampling to obtain the appropriate characteristics of the cost function associated with the recourse problem. However, as pointed out by Madansky,[1] the utilization of sampling can lead to inaccuracies. This, as we shall see, can be avoided by using a gradient method rather than a cutting plane method.

In § 2, an algorithm which is essentially the same as the algorithm developed by Benders [3][2] is described and a geometric interpretation is given. Section 3 exhibits the duality between this algorithm and a variant of the decomposition algorithms of Dantzig and Wolfe. The applications of this algorithm to optimal control problems with state space constraints and stochastic programs with recourse are developed in § 4 and § 5 respectively. Now, let us give a mathematical formulation of the linear program we are interested in.

---

[1] SIGMAP Conference on Stochastic Programming, Princeton, New Jersey, 1965.

[2] This was pointed out to us by E. Balas and J. Midler.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

Caso 2: Subproblema também com variáveis discretas

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

Caso 2: Subproblema também com variáveis discretas

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & Tx + Dy = d, \\ & x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{Z}^p_+. \end{aligned}$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta/mista

Caso 2: Subproblema também com variáveis discretas

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \quad & c^T x + h^T y \\
\text{s.a} \quad & Ax = b, \\
& Tx + Dy = d, \\
& x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{Z}^p_+.
\end{aligned}
$$

$$b \in \mathbb{R}^m,\ d \in \mathbb{R}^h,$$

$$
D = \begin{bmatrix} D^1 & & & \\ & D^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^K \end{bmatrix}
$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_{y} \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}_+^p \right\}$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_{y} \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}_{+}^{p} \right\}$$

- Duas dificuldades principais: prática e teórica;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_{y} \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}_{+}^{p} \right\}$$

- Duas dificuldades principais: prática e teórica;
- Dificuldade prática:

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_{y} \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}_{+}^{p} \right\}$$

- Duas dificuldades principais: prática e teórica;
- Dificuldade prática: resolver;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_y \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}^p_+ \right\}$$

- Duas dificuldades principais: prática e teórica;
- Dificuldade prática: resolver;
- Dificuldade teórica:

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_y \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}^p_+ \right\}$$

- Duas dificuldades principais: prática e teórica;
- Dificuldade prática: resolver;
- Dificuldade teórica: como obter o dual?

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_{y} \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}^p_+ \right\}$$

- Duas dificuldades principais: prática e teórica;
- Dificuldade prática: resolver;
- Dificuldade teórica: como obter o dual?
- Como então garantir que as soluções x não vão deixar o subproblema infactível?

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_{y} \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}^p_+ \right\}$$

- Duas dificuldades principais: prática e teórica;
- Dificuldade prática: resolver;
- Dificuldade teórica: como obter o dual?
- Como então garantir que as soluções x não vão deixar o subproblema infactível? (os raios do subproblema dual eram usados pra isso);

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

- O subproblema agora é um problema de otimização discreta:

$$\min_{y} \left\{ hy \mid Dy = d - T\bar{x}, y \in \mathbb{Z}_{+}^{p} \right\}$$

- Duas dificuldades principais: prática e teórica;
- Dificuldade prática: resolver;
- Dificuldade teórica: como obter o dual?
- Como então garantir que as soluções x não vão deixar o subproblema infactível? (os raios do subproblema dual eram usados pra isso);
- A função $\phi(x)$ pode deixar de ser convexa.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de factibilidade:

- Dado $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ tal que o subproblema seja infactível, precisamos inserir restrições no PMB para *cortar*/eliminar essa solução da região factível;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de factibilidade:

- Dado $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ tal que o subproblema seja infactível, precisamos inserir restrições no PMB para *cortar*/eliminar essa solução da região factível;
- Por exemplo, podemos usar a desigualdade:

$$\sum_{i:\bar{x}_i=0} x_i + \sum_{i:\bar{x}_i=1} (1 - x_i) \geq 1$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de factibilidade:

- Dado $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ tal que o subproblema seja infactível, precisamos inserir restrições no PMB para *cortar*/eliminar essa solução da região factível;
- Por exemplo, podemos usar a desigualdade:

$$\sum_{i:\bar{x}_i=0} x_i + \sum_{i:\bar{x}_i=1} (1 - x_i) \geq 1$$

- Outros tipos de desigualdade podem ser usados, incluindo aquelas que são próprias de um problema;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de otimalidade: [Laporte e Louveaux, 1993]

- Dado $\bar{x} \in \{0, 1\}^n$ tal que o subproblema seja factível, seja $\phi^*(\bar{x})$ o valor ótimo do subproblema;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de otimalidade: [Laporte e Louveaux, 1993]

- Dado $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ tal que o subproblema seja factível, seja $\phi^*(\bar{x})$ o valor ótimo do subproblema;
- Seja L um limitante (finito) para o valor do subproblema,

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de otimalidade: [Laporte e Louveaux, 1993]

- Dado $\bar{x} \in \{0, 1\}^n$ tal que o subproblema seja factível, seja $\phi^*(\bar{x})$ o valor ótimo do subproblema;
- Seja L um limitante (finito) para o valor do subproblema, i.e. $L \leq \phi(x)$ para todo $x \in \{0, 1\}^n$ t.q. $Ax = b$;

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de otimalidade: [Laporte e Louveaux, 1993]

- Dado $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ tal que o subproblema seja factível, seja $\phi^*(\bar{x})$ o valor ótimo do subproblema;
- Seja L um limitante (finito) para o valor do subproblema, i.e. $L \leq \phi(x)$ para todo $x \in \{0,1\}^n$ t.q. $Ax = b$;
- O seguinte corte de otimalidade é válido para o problema mestre:

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de otimalidade: [Laporte e Louveaux, 1993]

- Dado $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ tal que o subproblema seja factível, seja $\phi^*(\bar{x})$ o valor ótimo do subproblema;
- Seja L um limitante (finito) para o valor do subproblema, i.e. $L \leq \phi(x)$ para todo $x \in \{0,1\}^n$ t.q. $Ax = b$;
- O seguinte corte de otimalidade é válido para o problema mestre:

$$v \geq \phi^*(\bar{x}) - (\phi^*(\bar{x}) - L)\left(\sum_{i:\bar{x}_i=0} x_i + \sum_{i:\bar{x}_i=1} (1 - x_i)\right).$$

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de otimalidade: [Laporte e Louveaux, 1993]

- Dado $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ tal que o subproblema seja factível, seja $\phi^*(\bar{x})$ o valor ótimo do subproblema;
- Seja L um limitante (finito) para o valor do subproblema, i.e. $L \leq \phi(x)$ para todo $x \in \{0,1\}^n$ t.q. $Ax = b$;
- O seguinte corte de otimalidade é válido para o problema mestre:

$$v \geq \phi^*(\bar{x}) - (\phi^*(\bar{x}) - L)\left(\sum_{i:\bar{x}_i=0} x_i + \sum_{i:\bar{x}_i=1} (1 - x_i)\right).$$

Obs.: Outra estratégia é resolver a relaxação linear do subproblema e, assim, pode-se usar cortes gerados por pontos extremos e raios extremos, como antes.

Decomposição de Benders

▷ Otimização linear discreta

Cortes de otimalidade: [Laporte e Louveaux, 1993]

- Dado $\bar{x} \in \{0,1\}^n$ tal que o subproblema seja factível, seja $\phi^*(\bar{x})$ o valor ótimo do subproblema;
- Seja L um limitante (finito) para o valor do subproblema, i.e. $L \leq \phi(x)$ para todo $x \in \{0,1\}^n$ t.q. $Ax = b$;
- O seguinte corte de otimalidade é válido para o problema mestre:

$$v \geq \phi^*(\bar{x}) - (\phi^*(\bar{x}) - L)\left(\sum_{i:\bar{x}_i=0} x_i + \sum_{i:\bar{x}_i=1} (1 - x_i)\right).$$

Obs.: Outra estratégia é resolver a relaxação linear do subproblema e, assim, pode-se usar cortes gerados por pontos extremos e raios extremos, como antes. Entretanto, obtém-se apenas um limitante inferior.

Método L-shaped inteiro

▷ Laporte and Louveaux, 1993

Operations Research Letters 13 (1993) 133–142
North-Holland

April 1993

The integer L-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse

Gilbert Laporte

Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale A, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7

François V. Louveaux

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Faculté des Sciences Économiques et Sociales, 8 Rempart de la Vierge, 5000 Namur, Belgium.

Received February 1992
Revised September 1992

In this paper, a general branch-and-cut procedure for stochastic integer programs with complete recourse and first stage binary variables is presented. It is shown to provide a finite exact algorithm for a number of stochastic integer programs, even in the presence of binary variables or continuous random variables in the second stage.

stochastic integer programming; L-shaped method; branch-and-cut

Método L-shaped inteiro

▷ Laporte and Louveaux, 1993

$\theta \geq Q(x)$ for all feasible (x, θ), but simply for the optimal (x^{ν}, θ^{ν}).

We first present the Integer L-shaped method in general terms.

Step 0. Set $s := t =: \nu := 0$, $\bar{z} := \infty$. The value of θ is set equal to $-\infty$ or to an appropriate lower bound and is ignored in the computation. The only pendant node corresponds to the initial current problem.

Step 1. Select some pendant node in the list; if none exists, stop.

Step 2. Set $\nu := \nu + 1$; solve the current problem. If the current problem has no feasible solution, fathom the current node; go to Step 1. Otherwise, let (x^{ν}, θ^{ν}) be an optimal solution.

Step 3. Check for any relaxed constraint violation. If one exists, add one feasibility cut (7), set $s := s + 1$, and return to Step 2. If $cx^{\nu} + \theta^{\nu} > \bar{z}$, fathom the current problem and return to Step 1.

Step 4. Check for integrality restrictions. If one is violated, create two new branches following the usual branch and cut procedure; append the new nodes to the list of pendant nodes; return to Step 1.

Step 5. Compute $Q(x^{\nu})$ and $z^{\nu} = cx^{\nu} + Q(x^{\nu})$. If $z^{\nu} < \bar{z}$, the update $\bar{z}$.

Step 6. If $\theta^{\nu} \geq Q(x^{\nu})$, then fathom the current node and return to Step 1. Otherwise impose one optimality cut (8), set $t := t + 1$ and return to Step 2.

Bender's decomposition has long been applied to deterministic mixed integer programs or to stochastic programs with continuous variables. The proposed algorithm is an extension to the case of stochastic mixed integer programs. It differs from the classical L-shaped method since first-stage binary variables are now taken into account. Moreover, it can be seen that the fathoming rules are also different from what is usually done in branch-and-bound. In particular, nodes are not necessarily fathomed when

Método L-shaped inteiro

▷ Laporte and Louveaux, 1993

However, our purpose here is not to make further developments in that direction, but rather to derive optimality cuts for problems with first stage binary decision variables. Since these optimality cuts can be applied in cases where some second-stage variables are also binary, and in cases where the second-stage random variables are continuous, their use in the integer L-shaped method covers a wider class of applications than do existing methods. Two assumptions are required.

Assumption 1. Given a binary first stage vector of decision variables x, the function $Q(x)$ is computable from x. (This is frequently the case in location and routing problems, for example).

Assumption 2. There exists a finite value L satisfying $L \leq \min_x\{Q(x) \mid Ax = b,\ x \in \{0, 1\}^{n_1}\}$. (This is clearly the case if the original problem is bounded).

Since the first stage decision variables are binary, there are only a finite number of feasible first stage solutions. Let $r = 1, \ldots, R$, index these feasible solutions.

Proposition 2. *Let $x_i = 1$, $i \in S_r$ and $x_i = 0$, $i \notin S_r$ be the r-th feasible solution, and θ_r the corresponding expected second-stage value. Define the optimality cut as*

$$\theta \geq (\theta_r - L)\left(\sum_{i \in S_r} x_i - \sum_{i \notin S_r} x_i\right) - (\theta_r - L)(|S_r| - 1) + L, \tag{10}$$

where $|S_r|$ is the cardinality of S_r. Then, the set of optimality cuts (10) *defined for all first stage feasible solutions is a valid set of optimality cuts.*

Proof. The quantity $\sum_{i \in S_r} x_i - \sum_{i \notin S_r} x_i$ is always less than or equal to $|S_r|$. It takes the value $|S_r|$ only when x is the r^{th} feasible solution. Now, when $\sum_{i \in S_r} x_i - \sum_{i \notin S_r} x_i$ is equal to $|S_r|$, the right-hand side

Survey

▷ Gendron, Scutellà, Garroppo, Nencioni and Tavanti, 2016

European Journal of Operational Research 255 (2016) 151–162

Contents lists available at ScienceDirect

European Journal of Operational Research

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ejor

ELSEVIER

Decision Support

A branch-and-Benders-cut method for nonlinear power design in green wireless local area networks

CrossMark

Bernard Gendron[a,*], Maria Grazia Scutellà[b], Rosario G. Garroppo[c], Gianfranco Nencioni[c], Luca Tavanti[c]

[a] *CIRRELT and DIRO, Université de Montréal, Montréal, Canada*
[b] *Dipartimento di Informatica, Università di Pisa, Pisa, Italy*
[c] *Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università di Pisa, Pisa, Italy*

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 6 July 2015
Accepted 29 April 2016
Available online 4 May 2016

Keywords:
Integer programming
Benders decomposition
Branch-and-cut
Green wireless local area network
Network design

A B S T R A C T

We consider a problem arising in the design of green wireless local area networks. Decisions on powering-on a set of access points (APs), via the assignment of one power level (PL) to each opened AP, and decisions on the assignment of the user terminals (UTs) to the opened APs, have to be taken simultaneously. The PL assigned to an AP affects, in a nonlinear way, the capacity of the connections between the AP and the UTs that are assigned to it. The objective is to minimize the overall power consumption of the APs, which has two components: location/capacity dimensioning costs of the APs; assignment costs that depend on the total demands assigned to the APs. We develop a branch-and-Benders-cut (BBC) method where, in a non-standard fashion, the master problem includes the variables of the Benders subproblem, but relaxes their integrality. The BBC method has been tested on a large set of instances, and compared to a Benders decomposition algorithm on a subset of instances without assignment costs, where the two approaches can be compared. The computational results show the superiority of BBC in terms of solution quality, scalability and robustness.

Survey

▷ Rahmaniani, Crainic, Gendreau and Rei, 2017

European Journal of Operational Research 259 (2017) 801–817

Contents lists available at ScienceDirect

European Journal of Operational Research

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ejor

Invited Review

The Benders decomposition algorithm: A literature review

Ragheb Rahmaniani[a,c], Teodor Gabriel Crainic[a,b,*], Michel Gendreau[a,c], Walter Rei[a,b]

[a] CIRRELT - Interuniversity Research Centre on Enterprise Networks, Logistics and Transportation, Université de Montréal, P.O. Box 6128, Station Centre-Ville, Montréal H3C 3J7, Canada
[b] School of Management, Université du Québec à Montréal, P.O. Box 8888, Station Centre-Ville, Montréal H3C 3P8, Canada
[c] Department of Mathematics and Industrial Engineering, École Polytechnique de Montréal, P.O. Box 6079, Station Centre-ville, Montréal H3C 3A7, Canada

ARTICLE INFO

Article history:
Received 21 June 2016
Accepted 1 December 2016
Available online 9 December 2016

Keywords:
Combinatorial optimization
Benders decomposition

ABSTRACT

The Benders decomposition algorithm has been successfully applied to a wide range of difficult optimization problems. This paper presents a state-of-the-art survey of this algorithm, emphasizing its use in combinatorial optimization. We discuss the classical algorithm, the impact of the problem formulation on its convergence, and the relationship to other decomposition methods. We introduce a taxonomy of algorithmic enhancements and acceleration strategies based on the main components of the algorithm. The taxonomy provides the framework to synthesize the literature, and to identify shortcomings, trends and potential research directions. We also discuss the use of the Benders Decomposition to develop efficient

Survey

▷ Costa, 2005

Available online at www.sciencedirect.com

ELSEVIER

Computers & Operations Research 32 (2005) 1429–1450

computers & operations research

www.elsevier.com/locate/dsw

A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems

Alysson M. Costa*

Canada Research Chair in Distribution Management, HEC Montréal, 3000 Chemin de la Côte-Sainte-Catherine, Montréal, Canada H3T 2A7

Abstract

Network design problems concern the selection of arcs in a graph in order to satisfy, at minimum cost, some flow requirements, usually expressed in the form of origin–destination pair demands. Benders decomposition methods, based on the idea of partition and delayed constraint generation, have been successfully applied to many of these problems. This article presents a review of these applications.

Aplicação em Logística Humanitária

▷ Moreno et al., 2019

European Journal of Operational Research 275 (2019) 16–34

Contents lists available at ScienceDirect

European Journal of Operational Research

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ejor

ELSEVIER

Discrete Optimization

A branch-and-Benders-cut algorithm for the Crew Scheduling and Routing Problem in road restoration

Alfredo Moreno[a], Pedro Munari[a,*], Douglas Alem[b]

[a] Production Engineering Department, Federal University of São Carlos, Rod. Washington Luıs Km 235, CEP, São Carlos 13565-905, Brazil
[b] Management Science and Business Economics Group, University of Edinburgh Business School, 29 Buccleuch Place, Edinburgh EH89JS, UK

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 19 January 2018
Accepted 2 November 2018
Available online 8 November 2018

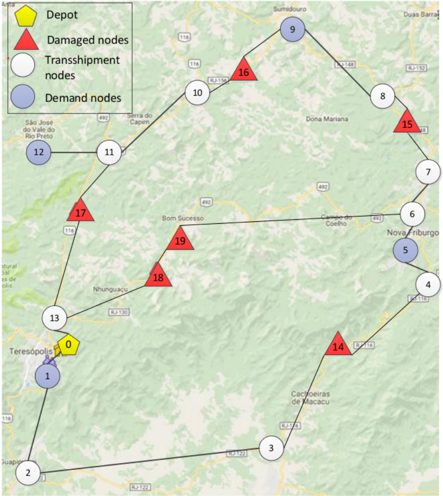
Keywords:
Combinatorial optimization
Benders decomposition
Branch-and-cut
Crew scheduling and routing
Road restoration

A B S T R A C T

Extreme events such as disasters cause partial or total disruption of basic services such as water, energy, communication and transportation. In particular, roads can be damaged or blocked by debris, thereby obstructing access to certain affected areas. Thus, restoration of the damaged roads is necessary to evacuate victims and distribute emergency commodities to relief centers or affected areas. The Crew Scheduling and Routing Problem (CSRP) addresses decisions in post-disaster situations with the aim of minimizing the time that affected areas remain inaccessible. The integration of crew scheduling and routing decisions makes this problem too complicated to be effectively solved for practical instances using mixed integer programming (MIP) formulations recently proposed in the literature. Therefore, we propose a branch-and-Benders-cut (BBC) algorithm that decomposes the integrated problem into a master problem (MP) with scheduling decisions and subproblems with routing decisions. Computational tests based on instances from the literature show that the proposed exact method improves the results of MIP formulations and other exact and metaheuristic methods proposed in literature. The BBC algorithm provides feasible solutions and optimality gaps for instances that thus far have not been possible to solve by exact methods in the literature.

Aplicação em Logística Humanitária

▷ Moreno et al., 2019



- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?