Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 2.1: Definições importantes da teoria de Otimização

Objetivos deste tópico

- Estudar conceitos básicos importantes da teoria de Otimização, que serão usados no decorrer da disciplina.

Definições importantes em Otimização

Definição: Hiperplano e semi-espaço

Definições importantes em Otimização

Definição: Hiperplano e semi-espaço

- Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo e $b \in \mathbb{R}$ um escalar.

Definições importantes em Otimização

Definição: Hiperplano e semi-espaço

- Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo e $b \in \mathbb{R}$ um escalar.

  O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$ é chamado de *hiperplano*.

Definições importantes em Otimização

Definição: Hiperplano e semi-espaço

- Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo e $b \in \mathbb{R}$ um escalar.

  O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$ é chamado de *hiperplano*.

  O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$ é chamado de *semi-espaço*.

Definições importantes em Otimização

Definição: Hiperplano e semi-espaço

- Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo e $b \in \mathbb{R}$ um escalar.

  O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$ é chamado de *hiperplano*.

  O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$ é chamado de *semi-espaço*.

Obs.:

Definições importantes em Otimização

Definição: Hiperplano e semi-espaço

- Seja $a \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo e $b \in \mathbb{R}$ um escalar.

  O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$ é chamado de *hiperplano*.

  O conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \geq b\}$ é chamado de *semi-espaço*.

Obs.:

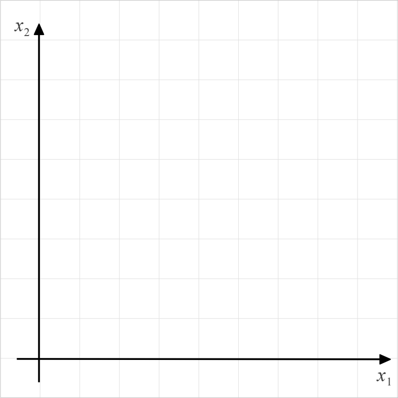
- A definição de semi-espaço inclui o caso '$\leq$'.

Definições importantes em Otimização

Exemplo: Hiperplano $x_1 + x_2 = 7$

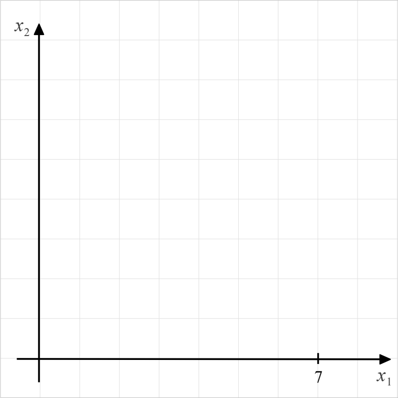
Definições importantes em Otimização

Exemplo: Hiperplano $x_1 + x_2 = 7$



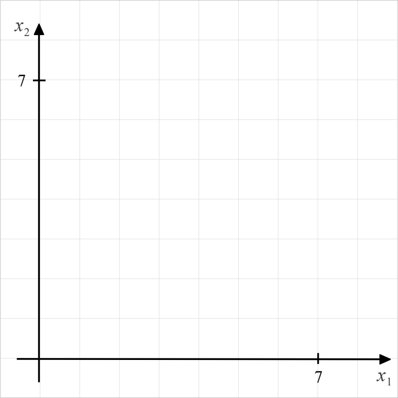
Definições importantes em Otimização

Exemplo: Hiperplano $x_1 + x_2 = 7$



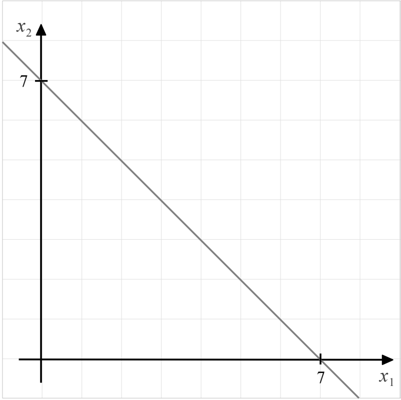
Definições importantes em Otimização

Exemplo: Hiperplano $x_1 + x_2 = 7$



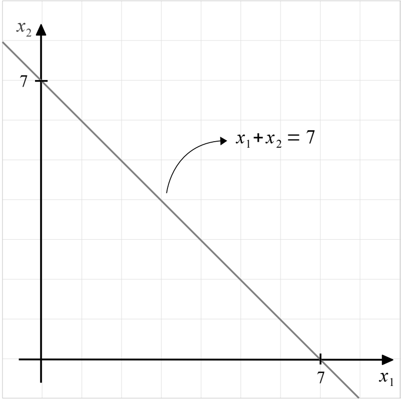
Definições importantes em Otimização

Exemplo: Hiperplano $x_1 + x_2 = 7$



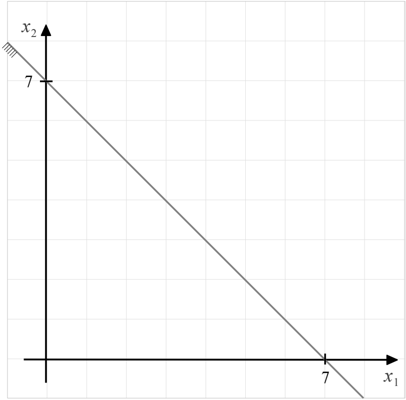
Definições importantes em Otimização

Exemplo: Hiperplano $x_1 + x_2 = 7$



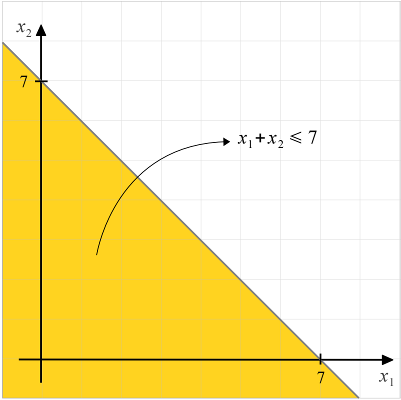
Definições importantes em Otimização

Exemplo: Semi-espaço $x_1 + x_2 \leq 7$



Definições importantes em Otimização

Exemplo: Semi-espaço $x_1 + x_2 \leq 7$



Definições importantes em Otimização

Definição: Poliedro e politopo.

Definições importantes em Otimização

Definição: Poliedro e politopo.

- *Poliedro* é todo conjunto que pode ser descrito como uma interseção de hiperplanos e/ou semi-espaços.

Definições importantes em Otimização

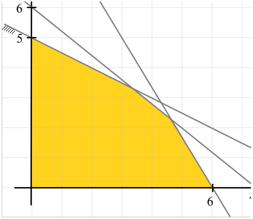
Definição: Poliedro e politopo.

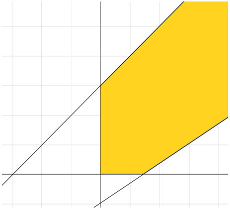
- *Poliedro* é todo conjunto que pode ser descrito como uma interseção de hiperplanos e/ou semi-espaços. Assim, um poliedro pode ser escrito na forma $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, sendo A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Definições importantes em Otimização

Definição: Poliedro e politopo.

- *Poliedro* é todo conjunto que pode ser descrito como uma interseção de hiperplanos e/ou semi-espaços. Assim, um poliedro pode ser escrito na forma $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, sendo A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

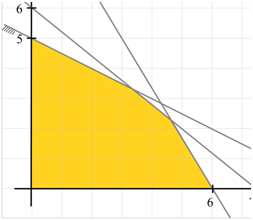


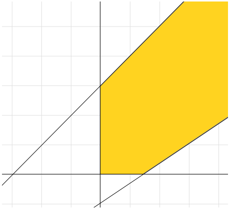


Definições importantes em Otimização

Definição: Poliedro e politopo.

- *Poliedro* é todo conjunto que pode ser descrito como uma interseção de hiperplanos e/ou semi-espaços. Assim, um poliedro pode ser escrito na forma $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, sendo A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.





- Um *politopo* é um poliedro limitado, i.e. existe uma constante $K > 0$ tal que $|x_i| \leq K$, $i = 1, \ldots, n$, para todo x factível.

Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$.

Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz

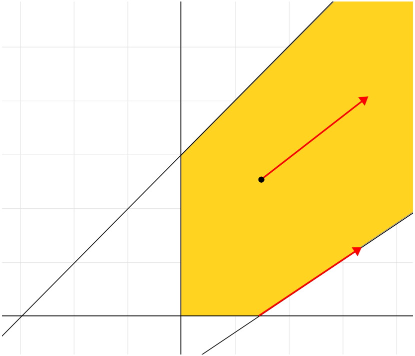
Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.



Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Definição: Raio de subida.

Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Definição: Raio de subida.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ contendo um raio $r \in \mathcal{S}$.

Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Definição: Raio de subida.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ contendo um raio $r \in \mathcal{S}$. Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear arbitrário.

Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Definição: Raio de subida.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ contendo um raio $r \in \mathcal{S}$. Seja $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ um funcional linear arbitrário. Se $f(x + \varepsilon r) > f(x)$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$,

Definições importantes em Otimização

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $x + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.

Definição: Raio de subida.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ contendo um raio $r \in \mathcal{S}$. Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear arbitrário. Se $f(x + \varepsilon r) > f(x)$, para todo $x \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$, então r é chamado de *raio de subida* de f.

Definições importantes em Otimização

Definição: Conjunto convexo.

Definições importantes em Otimização

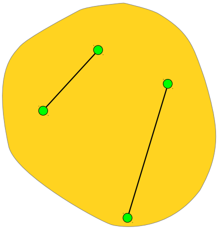
Definição: Conjunto convexo.

- Um conjunto $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$ é *convexo* se para quaisquer $x, y \in \mathcal{S}$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$ tivermos que $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{S}$.

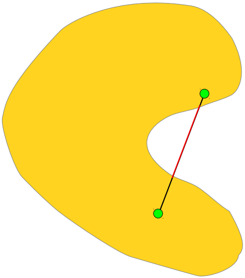
Definições importantes em Otimização

Definição: Conjunto convexo.

- Um conjunto $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$ é *convexo* se para quaisquer $x, y \in \mathcal{S}$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$ tivermos que $\lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{S}$.



convexo

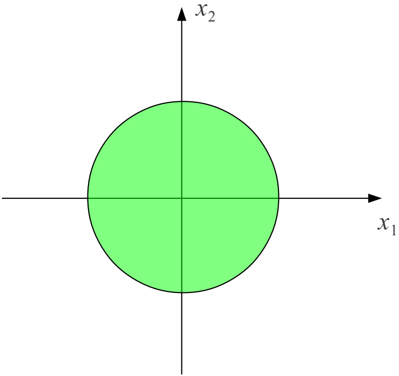


não-convexo

Definições importantes em Otimização

Esse conjunto é convexo?

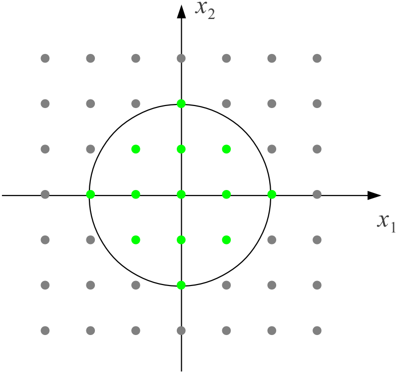
$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$$



Definições importantes em Otimização

Esse conjunto é convexo?

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r\}$$



Definições importantes em Otimização

Definição: Combinação convexa e envoltório convexo.

Definições importantes em Otimização

Definição: Combinação convexa e envoltório convexo.

- Sejam os vetores $x^1, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$.

Definições importantes em Otimização

Definição: Combinação convexa e envoltório convexo.

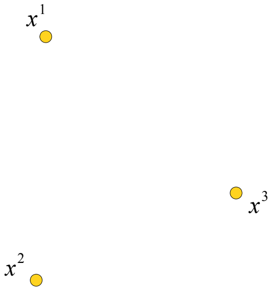
- Sejam os vetores $x^1, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Então:
  1. O vetor $y = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_k x^k$ é chamado de *combinação convexa* dos vetores $x^1, \ldots, x^k$;

Definições importantes em Otimização

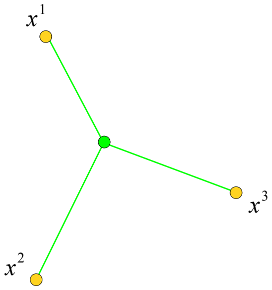
Definição: Combinação convexa e envoltório convexo.

- Sejam os vetores $x^1, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$ e os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Então:
  1. O vetor $y = \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_k x^k$ é chamado de *combinação convexa* dos vetores $x^1, \ldots, x^k$;
  2. O *envoltório convexo* dos vetores $x^1, \ldots, x^k$ é o conjunto de todas as combinações convexas destes vetores.

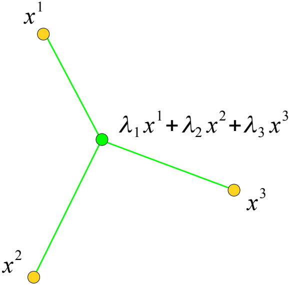
Definições importantes em Otimização



Definições importantes em Otimização

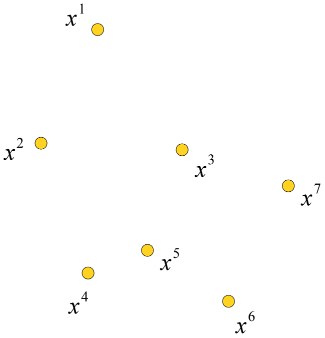


Definições importantes em Otimização



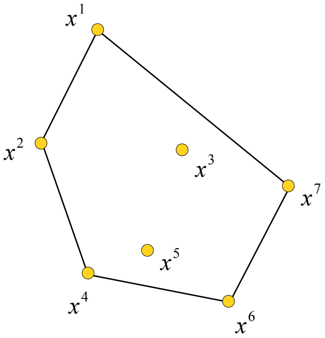
Definições importantes em Otimização

▷ Envoltório convexo



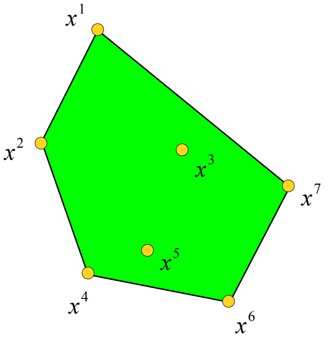
Definições importantes em Otimização

▷ Envoltório convexo



Definições importantes em Otimização

▷ Envoltório convexo



Definições importantes em Otimização

Definição: Função convexa/côncava.

Definições importantes em Otimização

Definição: Função convexa/côncava.

- Dado $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ é *convexa* se para quaisquer $x, y \in \mathcal{S}$ e qualquer $\lambda \in [0,1]$ tivermos que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Definições importantes em Otimização

Definição: Função convexa/côncava.

- Dado $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ é *convexa* se para quaisquer $x, y \in \mathcal{S}$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$ tivermos que

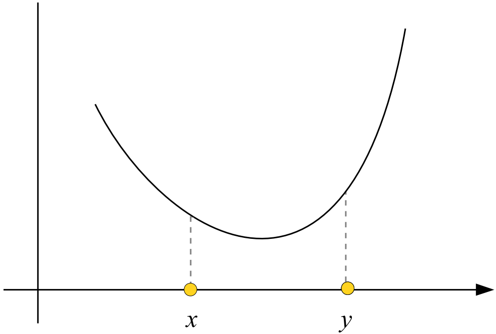
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

- Por outro lado, $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ é *côncava* se para quaisquer $x, y \in \mathcal{S}$ e qualquer $\lambda \in [0, 1]$ tivermos que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

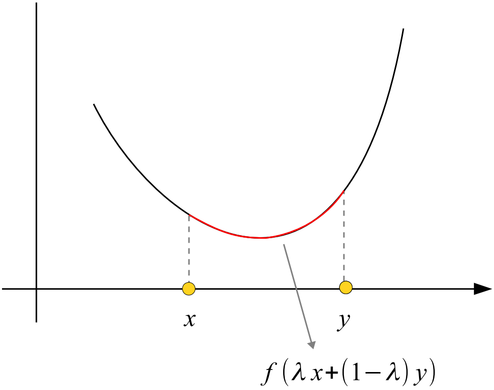
Definições importantes em Otimização

▷ Côncava ou convexa?



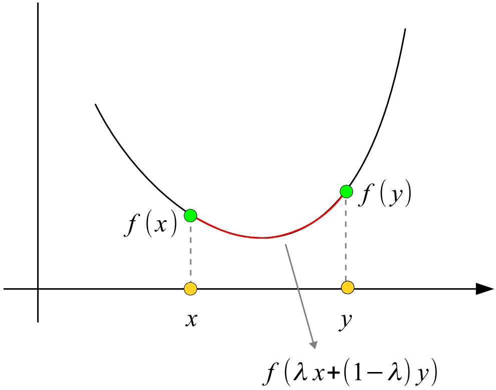
Definições importantes em Otimização

▷ Côncava ou convexa?



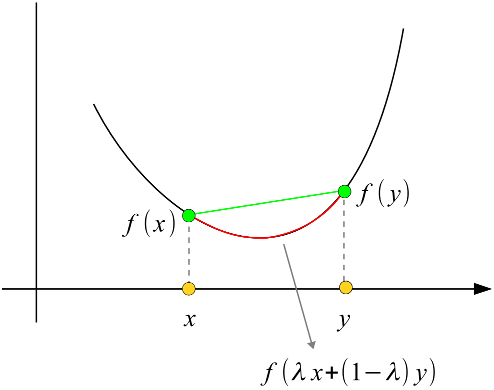
Definições importantes em Otimização

▷ Côncava ou convexa?



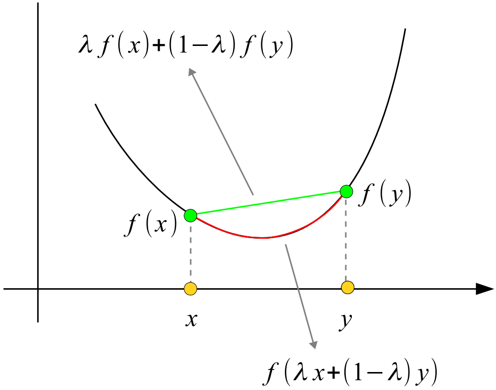
Definições importantes em Otimização

▷ Côncava ou convexa?



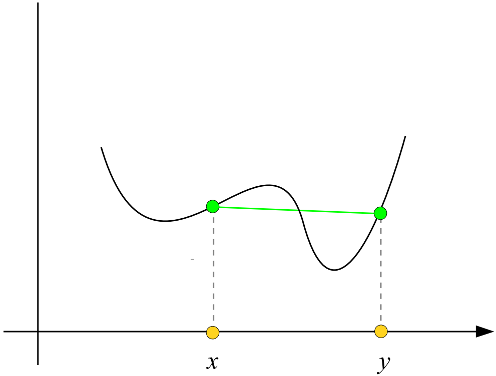
Definições importantes em Otimização

▷ Côncava ou convexa?



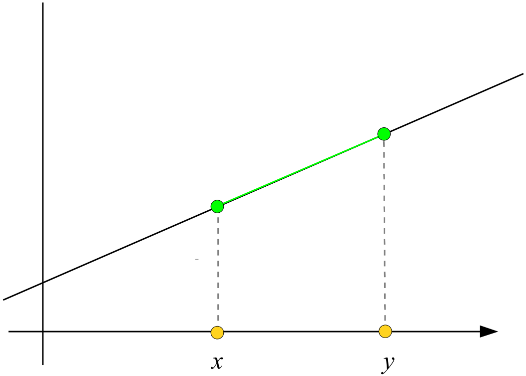
Definições importantes em Otimização

▷ Côncava ou convexa?



Definições importantes em Otimização

▷ Côncava ou convexa?



- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?