Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

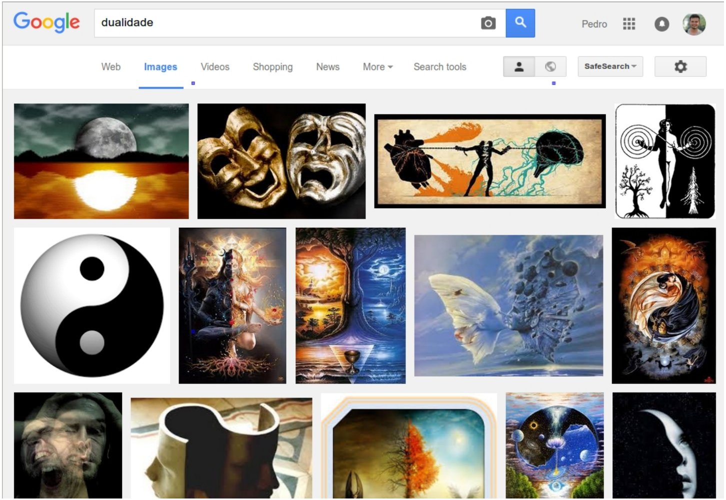
PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 2.2: Introdução à Dualidade; Interpretação Econômica

Objetivos deste tópico

- Conhecer o conceito de dualidade e entender como ela se manifesta na programação linear;
- Aprender o que é o problema dual e como obtê-lo;
- Estudar a Interpretação Econômica em programação linear.

Dualidade


Google
dualidade
Pedro
Web
Images
Videos
Shopping
News
More
Search tools
SafeSearch

Dualidade

▷ Yin-yang

Duas forças fundamentais opostas e complementares que se encontram em todas as coisas.

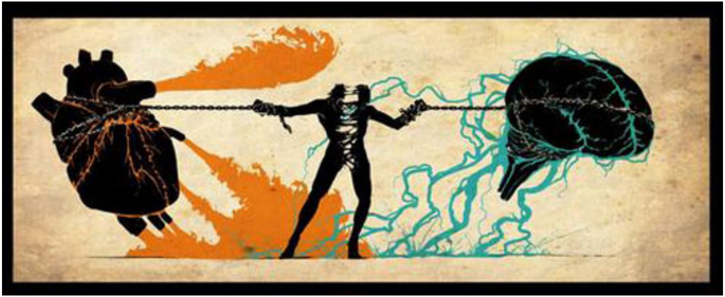
Dualidade

▷ Comédia e Tragédia

São as raízes do teatro! A princípio são completamente opostas, mas na verdade estão totalmente interligadas, nasceram juntas, e uma não existe sem a outra.

Dualidade

▷ Razão e emoção



Muitas vezes ficamos numa briga de sentimentos: razão fala uma coisa, mas o coração fala outra! São manifestações extremas, opostas, mas que são totalmente interligadas.

Dualidade

▷ Bem e mal

Extremos e totalmente interligados, assim como amor e ódio, noite e dia, entre muitos outros.

Dualidade

▷ Primal e dual

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\
& 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\
& p_1, p_2, p_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\ & 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x^\star = (4{,}62;\ 2{,}3)$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\ & 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x^\star = (4{,}62;\ 2{,}3)$$

$$p^\star = (5{,}37;\ 0;\ 0{,}78)$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min} & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\ & 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{array}$$

$$x^\star = (4{,}62;\ 2{,}3)$$
$$f(x^\star) = 18{,}46$$

$$p^\star = (5{,}37;\ 0;\ 0{,}78)$$
$$g(p^\star) = 18{,}46$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\
& 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\
& p_1, p_2, p_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$x^\star = (4{,}62;\ 2{,}3)$$
$$f(x^\star) = 18{,}46$$

$$p^\star = (5{,}37;\ 0;\ 0{,}78)$$
$$g(p^\star) = 18{,}46$$

Dualidade

▷ Primal e dual

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\ & 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x^\star = (4{,}62;\ 2{,}3)$$
$$f(x^\star) = 18{,}46$$

$$p^\star = (5{,}37;\ 0;\ 0{,}78)$$
$$g(p^\star) = 18{,}46$$

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- Se um é min, o outro é max;

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- Se um é min, o outro é max;
- O vetor de custos c de um é o vetor de recursos do outro;

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- Se um é min, o outro é max;
- O vetor de custos c de um é o vetor de recursos do outro;
- O vetor de recursos b de um é o vetor de custos do outro;

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- Se um é min, o outro é max;
- O vetor de custos c de um é o vetor de recursos do outro;
- O vetor de recursos b de um é o vetor de custos do outro;
- As variáveis de um estão relacionadas com as restrições do outro;

Dualidade

A todo problema de programação linear, está associado um outro problema de programação linear.

- Se um é min, o outro é max;
- O vetor de custos c de um é o vetor de recursos do outro;
- O vetor de recursos b de um é o vetor de custos do outro;
- As variáveis de um estão relacionadas com as restrições do outro;
- As restrições de um estão relacionadas com as variáveis do outro.

Dualidade

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & f(x) = c^T x \\
\text{s.a} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
\qquad\qquad \text{max}
$$

Dualidade

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \text{max} \quad g(p) = b^T p$$

Dualidade

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \text{max} \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & \qquad\quad \leq c \end{aligned}$$

Dualidade

$$\begin{array}{rl} \text{min} & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \text{max} & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \end{array}$$

Dualidade

$$\begin{array}{rl} \text{min} & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{rl} \text{max} & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre}) \end{array}$$

Dualidade

Problema dual

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} \text{max} \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre}) \end{aligned}$$

Dualidade

Problema primal	Problema dual
min $f(x) = c^T x$	max $g(p) = b^T p$
s.a $Ax = b$	s.a $A^T p \leq c$
$x \geq 0$	(p livre)

Dualidade

Problema primal

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre}) \end{aligned}$$

- $x_1, \ldots, x_n$: variáveis primais;

Dualidade

Problema primal	Problema dual
min $\quad f(x) = c^T x$	max $\quad g(p) = b^T p$
s.a $\quad Ax = b$	s.a $\quad A^T p \leq c$
$x \geq 0$	(p livre)

- $x_1, \ldots, x_n$: variáveis primais;
- $p_1, \ldots, p_m$: variáveis duais;

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$	$$\begin{array}{ll} \text{max} & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \leq c \\ & (p \text{ livre}) \end{array}$$

- $x_1, \ldots, x_n$: variáveis primais;
- $p_1, \ldots, p_m$: variáveis duais;
- $Ax = b$: restrições primais;

Dualidade

Problema primal	Problema dual
min $f(x) = c^T x$	max $g(p) = b^T p$
s.a $Ax = b$	s.a $A^T p \leq c$
$x \geq 0$	(p livre)

- $x_1, \ldots, x_n$: variáveis primais;
- $p_1, \ldots, p_m$: variáveis duais;
- $Ax = b$: restrições primais;
- $A^T p \leq c$: restrições duais.

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$\min \quad f(x) = c^T x$	$\max \quad g(p) = b^T p$
s.a $\quad Ax = b$	s.a $\quad A^T p \leq c$
$x \geq 0$	(p livre)

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e ambos têm o **mesmo** valor ótimo;

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$\min \quad f(x) = c^T x$	$\max \quad g(p) = b^T p$
s.a $\quad Ax = b$	s.a $\quad A^T p \leq c$
$x \geq 0$	(p livre)

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e ambos têm o **mesmo** valor ótimo;
- Se um é ilimitado, o outro é infactível;

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$\min \quad f(x) = c^T x$	$\max \quad g(p) = b^T p$
$\text{s.a} \quad Ax = b$	$\text{s.a} \quad A^T p \leq c$
$x \geq 0$	$(p \text{ livre})$

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e ambos têm o **mesmo** valor ótimo;
- Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$\min \quad f(x) = c^T x$	$\max \quad g(p) = b^T p$
$\text{s.a} \quad Ax = b$	$\text{s.a} \quad A^T p \leq c$
$x \geq 0$	(p livre)

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e ambos têm o **mesmo** valor ótimo;
- Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- O dual do dual é o primal.

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$\min \quad f(x) = c^T x$	$\max \quad g(p) = b^T p$
$\text{s.a} \quad Ax \geq b$	$\text{s.a} \quad A^T p \leq c$
$x \geq 0$	$p \geq 0$

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e ambos têm o **mesmo** valor ótimo;
- Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- O dual do dual é o primal.

Dualidade

Problema primal	Problema dual
min $f(x) = c^T x$	max $g(p) = b^T p$
s.a $Ax \leq b$	s.a $A^T p \leq c$
$x \geq 0$	$p \leq 0$

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e ambos têm o **mesmo** valor ótimo;
- Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- O dual do dual é o primal.

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$\min \quad f(x) = c^T x$	$\max \quad g(p) = b^T p$
$\text{s.a} \quad Ax = b$	$\text{s.a} \quad A^T p \geq c$
$x \leq 0$	(p livre)

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e ambos têm o **mesmo** valor ótimo;
- Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- O dual do dual é o primal.

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$
\begin{array}{rc}
\text{min} & 15x_1 + 12x_2 \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\
 & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max	
Variável primal	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max		
Variável primal	Restrição dual	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max		
Variável primal	Restrição dual	
≥ 0		

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max			
Variável primal		Restrição dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max			
Variável primal		Restrição dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max			
Variável primal		Restrição dual	
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	
livre	$\Rightarrow$	$=$	

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max				
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal	Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$		
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$		
livre	$\Rightarrow$	$=$		

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$			
livre	$\Rightarrow$	$=$			

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$			

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Primal max $\Rightarrow$ Dual min					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≤ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≥ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$
\begin{array}{rll}
\text{min} & 15x_1 + 12x_2 & \\
\text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 & \rightarrow p_1 \\
 & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 & \rightarrow p_2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\begin{array}{rll} \text{min} & 15x_1 + 12x_2 & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 & \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 & \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rll} \text{max} & 3p_1 + 5p_2 & \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 & 15 \\ & 2p_1 - 4p_2 & 12 \\ & p_1 \quad , p_2 & \end{array}$$

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & 15x_1 + 12x_2 & \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 3 & \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 & \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3p_1 + 5p_2 \\ \text{s.a} \quad & p_1 + 2p_2 \leq 15 \\ & 2p_1 - 4p_2 \leq 12 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\begin{array}{rll} \text{min} & 15x_1 + 12x_2 & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 & \to p_1 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 & \to p_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 3p_1 + 5p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \leq 15 \\ & 2p_1 - 4p_2 \leq 12 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3 \\ & 2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$\min \quad f(x) = c^T x$	$\max \quad g(p) = b^T p$
s.a $\quad Ax = b$	s.a $\quad A^T p \leq c$
$x \geq 0$	$(p$ livre$)$

- Se um tem solução ótima, o outro também tem e ambos têm o **mesmo** valor ótimo;
- Se um é ilimitado, o outro é infactível;
- Se um é infactível, o outro é ou ilimitado ou infactível;
- O dual do dual é o primal.

Dualidade

▷ Exemplo: determine o problema dual

$$\begin{array}{rll} \text{min} & 15x_1 + 12x_2 & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \geq 3 & \to p_1 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 5 & \to p_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 3p_1 + 5p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \leq 15 \\ & 2p_1 - 4p_2 \leq 12 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3 \\ & 2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{max} & 3p_1 + 5p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \leq 15 \\ & 2p_1 - 4p_2 \leq 12 \\ & -p_1 + 0p_2 \leq 0 \\ & 0p_1 + p_2 \leq 0 \\ & p_1, p_2 \text{ livres} \end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Tabela de conversão primal-dual

Primal min $\Rightarrow$ Dual max					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≥ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≤ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Primal max $\Rightarrow$ Dual min					
Variável primal		Restrição dual	Restrição primal		Variável dual
≥ 0	$\Rightarrow$	$\geq$	$\geq$	$\Rightarrow$	≤ 0
≤ 0	$\Rightarrow$	$\leq$	$\leq$	$\Rightarrow$	≥ 0
livre	$\Rightarrow$	$=$	$=$	$\Rightarrow$	livre

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{rll} \text{max} & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 & \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 & \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \quad \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{min} \quad 10p_1 + 8p_2$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{rll} \text{max} & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 & \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 & \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \text{min} & 10p_1 + 8p_2 & \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 & 5 \\ & 2p_1 - p_2 & 12 \\ & p_1 + 3p_2 & 4 \\ & p_1 \qquad , p_2 & \end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{rll} \text{max} & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 & \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 & \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 10p_1 + 8p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \geq 5 \\ & 2p_1 - p_2 \geq 12 \\ & p_1 + 3p_2 \geq 4 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \text{ livre} \end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício: determine o problema dual

$$\begin{array}{rll} \text{max} & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 & \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 & \rightarrow p_1 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 & \rightarrow p_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \text{min} & 10p_1 + 8p_2 & \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 \geq 5 & \rightarrow x_1 \\ & 2p_1 - p_2 \geq 12 & \rightarrow x_2 \\ & p_1 + 3p_2 \geq 4 & \rightarrow x_3 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \text{ livre} & \end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício

Determine o problema dual, desenhe sua região factível e encontre a solução ótima dual usando o método gráfico.

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\
& 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Exercício

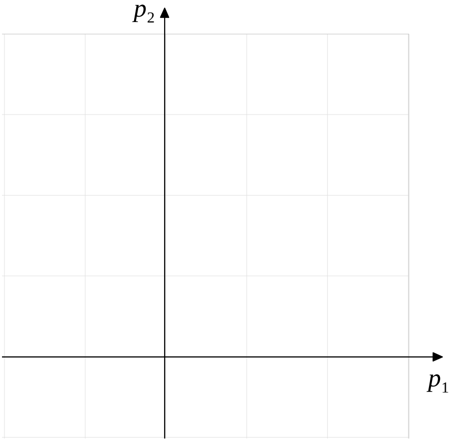
Determine o problema dual, desenhe sua região factível e encontre a solução ótima dual usando o método gráfico.

$$\begin{array}{rc} \text{min} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array} \qquad \begin{array}{rc} \text{max} & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\ \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\ & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{array}$$

Dualidade

▷ Exercício

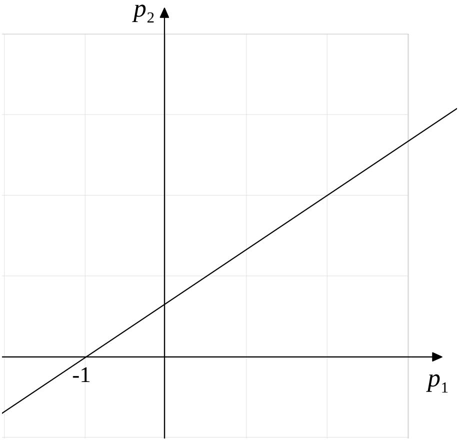
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\ \text{s.a} \quad & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\ & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Dualidade

▷ Exercício

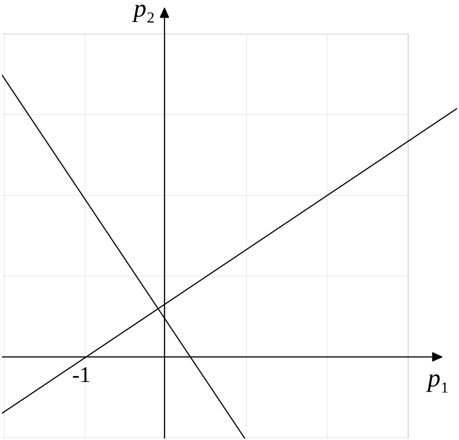
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
\text{s.a} \quad & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
& 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
& p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Dualidade

▷ Exercício

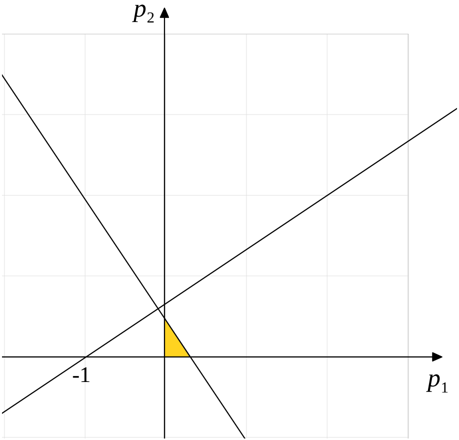
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
\text{s.a} \quad & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
& 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
& p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Dualidade

▷ Exercício

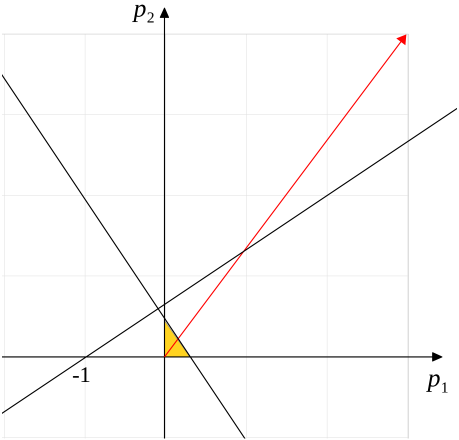
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
\text{s.a} \quad & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
& 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
& p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Dualidade

▷ Exercício

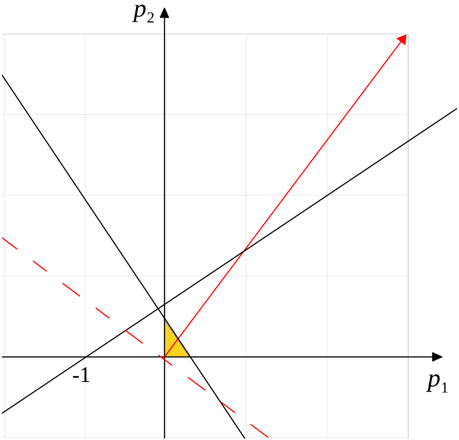
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
\text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
 & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
\end{array}
$$



Dualidade

▷ Exercício

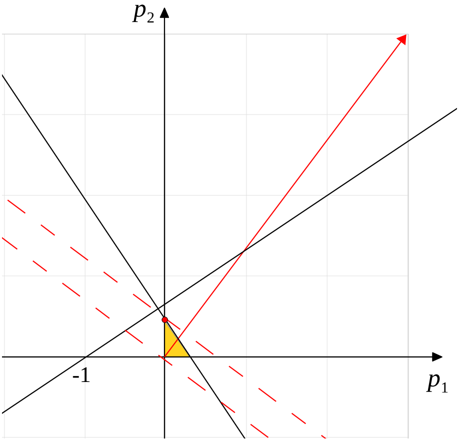
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\ \text{s.a} \quad & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\ & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Dualidade

▷ Exercício

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\ \text{s.a} \quad & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\ & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\ & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0. \end{aligned}$$



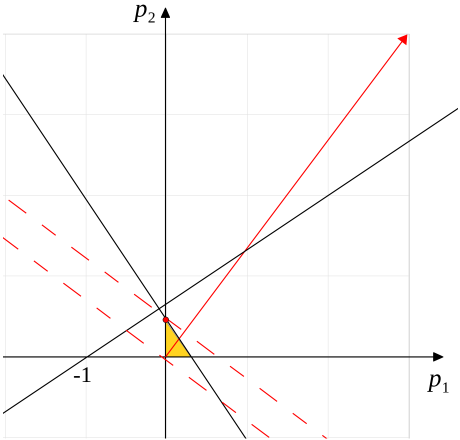
Dualidade

▷ Exercício

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
\text{s.a} \quad & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
& 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
& p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$p^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$g(p^*) = 6$$



Dualidade

▷ Interpretação econômica

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R$ por ton)

Dualidade

▷ Interpretação econômica

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de Cobre, Zinco e Chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R$ por ton)

Outra fábrica, do mesmo segmento, está interessada em comprar todo o estoque de Cobre, Zinco e Chumbo da empresa. Há o interesse da empresa no negócio, desde que a receita obtida com a venda do material seja pelo menos igual à receita que seria obtida com a venda das ligas. Para garantir o negócio, a outra fábrica deseja oferecer um preço justo, mas que seja o menor possível. Qual deve ser a proposta de preços?

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
  3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque: 3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
  3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque: 3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
  p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra*, *preço dual*)

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
  3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
  p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra*, *preço dual*)
- Receita total com a venda do material:

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
  3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
  p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra*, *preço dual*)
- Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
  3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
  p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra*, *preço dual*)
- Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.
- Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 1:

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque: 3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
  p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra*, *preço dual*)
- Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.
- Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 1: $0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3$.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque: 3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
  p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra*, *preço dual*)
- Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.
- Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 1: $0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3$.
- Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 2:

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- A metalúrgica pode vender a matéria-prima em estoque:
  3 ton de Cobre, 1 ton de Zinco e 3 ton de Chumbo;
- Qual deve ser o preço unitário de cada material?
- p_i : preço a ser cobrado por unidade do material $i = 1, 2, 3$;
  p_i é o *preço de oportunidade* (*preço sombra*, *preço dual*)
- Receita total com a venda do material: $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.
- Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 1: $0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3$.
- Receita (proporcional) obtida com a venda dos materiais que compõem 1 ton da liga 2: $0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3$.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- Para a Liga 1, teríamos como receita R$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3$;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3$;
- Para a Liga 2, teríamos como receita R\$ 2 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3$;
- Para a Liga 2, teríamos como receita R\$ 2 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2$;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3$;
- Para a Liga 2, teríamos como receita R\$ 2 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2$;
- Como determinar os preços p_i tal que a receita obtida com a venda dos materiais seja pelo menos igual à receita obtida com a venda das ligas (produto final)?

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Precisamos garantir que a receita obtida com a venda do material que seria usado na composição de cada liga seja maior que o preço de venda da liga.
- Para a Liga 1, teríamos como receita R\$ 3 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3$;
- Para a Liga 2, teríamos como receita R\$ 2 por unidade vendida. Logo, só vale a pena vender o material estoque se $0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2$;
- Como determinar os preços p_i tal que a receita obtida com a venda dos materiais seja pelo menos igual à receita obtida com a venda das ligas (produto final)? min $3p_1 + 1p_2 + 3p_3$.

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Logo, para determinar o preço a ser proposto, de modo que as fábricas fiquem satisfeitas com o negócio, resolvemos o modelo:

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\ & 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{array}$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Qual a relação entre esses dois problemas?

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\ & 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Qual a relação entre esses dois problemas?

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\
& 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\
& p_1, p_2, p_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Temos um par primal-dual!

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Qual a relação entre esses dois problemas?

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\ & 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Temos um par primal-dual!

$$x^\star \approx (4{,}62;\ 2{,}3) \qquad p^\star \approx (5{,}37;\ 0;\ 0{,}78)$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

Qual a relação entre esses dois problemas?

$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{min} & g(p_1, p_2, p_3) = 3p_1 + 1p_2 + 3p_3 \\ \text{s.a} & 0{,}5p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 \geq 3 \\ & 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}5p_3 \geq 2 \\ & p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{array}$$

Temos um par primal-dual!

$$x^\star \approx (4{,}62;\ 2{,}3)$$
$$f(x^\star) \approx 18{,}46$$

$$p^\star \approx (5{,}37;\ 0;\ 0{,}78)$$
$$g(p^\star) \approx 18{,}46$$

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Logo, o valor ótimo desses problemas corresponde ao ponto de equilíbrio entre as decisões dos dois problemas;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Logo, o valor ótimo desses problemas corresponde ao ponto de equilíbrio entre as decisões dos dois problemas;
- Essa interpretação econômica da dualidade mostra que a melhor decisão (solução) para o problema primal está relacionada com a melhor decisão (solução) para o problema dual;

Dualidade

▷ Interpretação econômica

- Logo, o valor ótimo desses problemas corresponde ao ponto de equilíbrio entre as decisões dos dois problemas;
- Essa interpretação econômica da dualidade mostra que a melhor decisão (solução) para o problema primal está relacionada com a melhor decisão (solução) para o problema dual;
- Assim, uma solução factível só pode ser ótima para o problema primal, se a solução dual correspondente também for ótima para o problema dual.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?