Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 2.3: Teoria de Dualidade

Objetivos deste tópico

- Estudar os principais resultados teóricos da dualidade em programação linear.

Dualidade

▷ Teoria

- A teoria de dualidade tem suas raízes nos trabalhos de Lagrange;

Dualidade

▷ Teoria

- A teoria de dualidade tem suas raízes nos trabalhos de Lagrange;
- A otimização de uma função restrita a um domínio é tratada como a otimização de uma função irrestrita penalizada;

Dualidade

▷ Teoria

- A teoria de dualidade tem suas raízes nos trabalhos de Lagrange;
- A otimização de uma função restrita a um domínio é tratada como a otimização de uma função irrestrita penalizada;

Joseph-Louis Lagrange

Mathematician

Joseph-Louis Lagrange was an Italian Enlightenment Era mathematician and astronomer. He made significant contributions to the fields of analysis, number theory, and both classical and celestial mechanics. Wikipedia

Born: January 25, 1736, Turin, Italy

Died: April 10, 1813, Paris, France

Education: École Polytechnique

Books: Analytical mechanics

Parents: Giuseppe Francesco Lodovico Lagrange, Maria Theresa Gros

Dualidade

- Considere que o seguinte problema possua solução ótima x^*:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

- Considere que o seguinte problema possua solução ótima x^*:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Existe um vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ tal que o seguinte problema é equivalente:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x + (p^*)^T (b - Ax) \\ \text{s.a} \quad & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

- Para um vetor $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, temos uma relaxação:

$$f(x^*) \quad = \quad \min_{x \geq 0} \{c^T x \mid Ax = b\}$$

Dualidade

- Para um vetor $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, temos uma relaxação:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x \mid Ax = b\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax) \mid Ax = b\} \end{aligned}$$

Dualidade

- Para um vetor $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, temos uma relaxação:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \min_{x \geq 0}\{c^T x \mid Ax = b\} \\ &= \min_{x \geq 0}\{c^T x + p^T(b - Ax) \mid Ax = b\} \\ &\geq \min_{x \geq 0}\{c^T x + p^T(b - Ax)\}. \end{aligned}$$

Dualidade

- Para um vetor $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, temos uma relaxação:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x \mid Ax = b\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax) \mid Ax = b\} \\ &\geq \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax)\}. \end{aligned}$$

- Seja $g(p)$ o valor ótimo deste problema relaxado (em função de p), i.e.

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax)\}.$$

Dualidade

- Para um vetor $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, temos uma relaxação:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x \mid Ax = b\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax) \mid Ax = b\} \\ &\geq \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\}. \end{aligned}$$

- Seja $g(p)$ o valor ótimo deste problema relaxado (em função de p), i.e.

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\}.$$

- Para qualquer $p \in \mathbb{R}^m$, temos $g(p) \leq f(x^*)$.

Dualidade

- Para um vetor $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário, temos uma relaxação:

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x \mid Ax = b\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax) \mid Ax = b\} \\ &\geq \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax)\}. \end{aligned}$$

- Seja $g(p)$ o valor ótimo deste problema relaxado (em função de p), i.e.

$$g(p) = \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T(b - Ax)\}.$$

- Para qualquer $p \in \mathbb{R}^m$, temos $g(p) \leq f(x^*)$. Assim, temos um limitante inferior para o valor ótimo do problema original.

Dualidade

Surgem então as questões:

- Qual será o vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ que resulta no melhor limitante inferior?

Dualidade

Surgem então as questões:

- Qual será o vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ que resulta no melhor limitante inferior?
- Será que podemos garantir que $g(p^*) = f(x^*)$?

Dualidade

Surgem então as questões:

- Qual será o vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ que resulta no melhor limitante inferior?
- Será que podemos garantir que $g(p^*) = f(x^*)$?

Melhor limitante:

$$g(p^*)$$

Dualidade

Surgem então as questões:

- Qual será o vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ que resulta no melhor limitante inferior?
- Será que podemos garantir que $g(p^*) = f(x^*)$?

Melhor limitante:

$$g(p^*) \quad = \quad \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p)$$

Dualidade

Surgem então as questões:

- Qual será o vetor $p^* \in \mathbb{R}^m$ que resulta no melhor limitante inferior?
- Será que podemos garantir que $g(p^*) = f(x^*)$?

Melhor limitante:

$$\begin{aligned} g(p^*) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\}. \end{aligned}$$

Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$g(p)$$

Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$g(p) \quad = \quad \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\}$$

Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$\begin{aligned} g(p) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T b - p^T A x\} \end{aligned}$$

Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$\begin{aligned} g(p) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\} \\ &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T b - p^T Ax\} \\ &= p^T b + \min_{x \geq 0} \{c^T x - p^T Ax\} \end{aligned}$$

Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$\begin{aligned} g(p) &= \min_{x \geq 0}\{c^T x + p^T(b - Ax)\} \\ &= \min_{x \geq 0}\{c^T x + p^T b - p^T Ax\} \\ &= p^T b + \min_{x \geq 0}\{c^T x - p^T Ax\} \\ &= p^T b + \min_{x \geq 0}\{(c^T - p^T A)x\} \end{aligned}$$

Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$\begin{aligned}
g(p) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\} \\
&= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T b - p^T Ax\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \{c^T x - p^T Ax\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \{(c^T - p^T A)x\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (c_j - p^T a_j) x_j \right\}
\end{aligned}$$

Dualidade

Temos que para $p \in \mathbb{R}^m$ arbitrário:

$$
\begin{aligned}
g(p) &= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T (b - Ax)\} \\
&= \min_{x \geq 0} \{c^T x + p^T b - p^T Ax\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \{c^T x - p^T Ax\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \{(c^T - p^T A)x\} \\
&= p^T b + \min_{x \geq 0} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (c_j - p^T a_j) x_j \right\} \\
&= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j.
\end{aligned}
$$

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j =$$

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}} \right.$$

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \left\{ \begin{array}{l} -\infty, \\ \\ \end{array} \right.$$

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \\ & \end{cases}$$

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ & \end{cases}$$

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \qquad (x_j = 0) \end{cases}$$

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \qquad (x_j = 0) \end{cases}$$

- Sempre que essa expressão resulta em $-\infty$, temos um limitante trivial; (lembre-se que estamos buscando o limitante máximo)

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \qquad (x_j = 0) \end{cases}$$

- Sempre que essa expressão resulta em $-\infty$, temos um limitante trivial; (lembre-se que estamos buscando o limitante máximo)
- Assim, queremos evitar esse tipo de limitante;

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \qquad (x_j = 0) \end{cases}$$

- Sempre que essa expressão resulta em $-\infty$, temos um limitante trivial; (lembre-se que estamos buscando o limitante máximo)
- Assim, queremos evitar esse tipo de limitante;
- Como?

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \qquad (x_j = 0) \end{cases}$$

- Sempre que essa expressão resulta em $-\infty$, temos um limitante trivial; (lembre-se que estamos buscando o limitante máximo)
- Assim, queremos evitar esse tipo de limitante;
- Como? Basta restringirmos p t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$;

Dualidade

Observe que para cada $j = 1, \ldots, n$, temos:

$$\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = \begin{cases} -\infty, & \text{se } (c_j - p^T a_j) < 0, \qquad (x_j \to \infty) \\ 0, & \text{c.c.} \qquad (x_j = 0) \end{cases}$$

- Sempre que essa expressão resulta em $-\infty$, temos um limitante trivial; (lembre-se que estamos buscando o limitante máximo)
- Assim, queremos evitar esse tipo de limitante;
- Como? Basta restringirmos p t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$;
- Dessa forma, $\min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j = 0$.

Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$g(p) \quad = \quad p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j$$

Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j \\ &= p^T b \end{aligned}$$

Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j \\ &= p^T b \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$ t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j \\ &= p^T b \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$ t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$g(p^*) = \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p)$$

Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j \\ &= p^T b \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$ t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} g(p^*) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{ g(p) \mid A^T p \leq c \} \end{aligned}$$

Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j \\ &= p^T b \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$ t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} g(p^*) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{ g(p) \mid A^T p \leq c \} \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{ p^T b \mid A^T p \leq c \}. \end{aligned}$$

Dualidade

Continuando a expressão para $g(p)$, temos que:

$$\begin{aligned} g(p) &= p^T b + \sum_{j=1}^{n} \min_{x_j \geq 0} (c_j - p^T a_j) x_j \\ &= p^T b \end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^m$ t.q. $c_j - p^T a_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} g(p^*) &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} g(p) \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{ g(p) \mid A^T p \leq c \} \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}^m} \{ p^T b \mid A^T p \leq c \}. \end{aligned}$$

(problema dual)

Dualidade

Problema primal

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \end{aligned}$$

Dualidade

Problema primal	Problema dual
$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} \text{max} \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \\ & p \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Exercício

Usando a teoria Lagrangiana, determine o problema dual do seguinte problema de programação linear (sem usar a forma padrão):

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
\text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2 \\
& a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq b_3 \\
& x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 0, \ x_3 \text{ livre.}
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

- Se x é uma solução factível para o problema primal e p é uma solução factível para o problema dual, então $b^T p \leq c^T x$.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

- Se x é uma solução factível para o problema primal e p é uma solução factível para o problema dual, então $b^T p \leq c^T x$.

Prova:

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

- Se x é uma solução factível para o problema primal e p é uma solução factível para o problema dual, então $b^T p \leq c^T x$.

Prova: Como x é factível, temos que $Ax = b$.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

- Se x é uma solução factível para o problema primal e p é uma solução factível para o problema dual, então $b^T p \leq c^T x$.

  Prova: Como x é factível, temos que $Ax = b$. Da mesma forma, temos que $A^T p \leq c$.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

- Se x é uma solução factível para o problema primal e p é uma solução factível para o problema dual, então $b^T p \leq c^T x$.

Prova: Como x é factível, temos que $Ax = b$. Da mesma forma, temos que $A^T p \leq c$. Logo, $b^T p$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

- Se x é uma solução factível para o problema primal e p é uma solução factível para o problema dual, então $b^T p \leq c^T x$.

  Prova: Como x é factível, temos que $Ax = b$. Da mesma forma, temos que $A^T p \leq c$. Logo, $b^T p = (Ax)^T p$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

- Se x é uma solução factível para o problema primal e p é uma solução factível para o problema dual, então $b^T p \leq c^T x$.

  Prova: Como x é factível, temos que $Ax = b$. Da mesma forma, temos que $A^T p \leq c$. Logo, $b^T p = (Ax)^T p = x^T A^T p$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade fraca.

- Se x é uma solução factível para o problema primal e p é uma solução factível para o problema dual, então $b^T p \leq c^T x$.

Prova: Como x é factível, temos que $Ax = b$. Da mesma forma, temos que $A^T p \leq c$. Logo, $b^T p = (Ax)^T p = x^T A^T p \leq x^T c$.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 1:

1. Se o problema primal é ilimitado, então o dual é infactível;
2. Se o problema dual é ilimitado, então o primal é infactível.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 1:

1. Se o problema primal é ilimitado, então o dual é infactível;
2. Se o problema dual é ilimitado, então o primal é infactível.

Prova:

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 1:

1. Se o problema primal é ilimitado, então o dual é infactível;
2. Se o problema dual é ilimitado, então o primal é infactível.

Prova: (1) Suponha que o problema primal seja ilimitado e que seu dual tenha uma solução factível p.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 1:

1. Se o problema primal é ilimitado, então o dual é infactível;
2. Se o problema dual é ilimitado, então o primal é infactível.

Prova: (1) Suponha que o problema primal seja ilimitado e que seu dual tenha uma solução factível p. Pelo teorema da dualidade fraca, temos $b^T p \leq c^T x$, para todo x factível.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 1:

1. Se o problema primal é ilimitado, então o dual é infactível;
2. Se o problema dual é ilimitado, então o primal é infactível.

Prova: (1) Suponha que o problema primal seja ilimitado e que seu dual tenha uma solução factível p. Pelo teorema da dualidade fraca, temos $b^T p \leq c^T x$, para todo x factível. Assim $b^T p < -\infty$,

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 1:

1. Se o problema primal é ilimitado, então o dual é infactível;
2. Se o problema dual é ilimitado, então o primal é infactível.

Prova: (1) Suponha que o problema primal seja ilimitado e que seu dual tenha uma solução factível p. Pelo teorema da dualidade fraca, temos $b^T p \leq c^T x$, para todo x factível. Assim $b^T p < -\infty$, o que é absurdo,

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 1:

1. Se o problema primal é ilimitado, então o dual é infactível;
2. Se o problema dual é ilimitado, então o primal é infactível.

Prova: (1) Suponha que o problema primal seja ilimitado e que seu dual tenha uma solução factível p. Pelo teorema da dualidade fraca, temos $b^T p \leq c^T x$, para todo x factível. Assim $b^T p < -\infty$, o que é absurdo, pois assumimos que p é factível e deveríamos ter $b^T p \in \mathbb{R}$.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 1:

1. Se o problema primal é ilimitado, então o dual é infactível;
2. Se o problema dual é ilimitado, então o primal é infactível.

Prova: (1) Suponha que o problema primal seja ilimitado e que seu dual tenha uma solução factível p. Pelo teorema da dualidade fraca, temos $b^T p \leq c^T x$, para todo x factível. Assim $b^T p < -\infty$, o que é absurdo, pois assumimos que p é factível e deveríamos ter $b^T p \in \mathbb{R}$. (2) Similar.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 2:

1. Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect., tais que $b^T p = c^T x$. Então, x e p são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respect.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 2:

1. Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect., tais que $b^T p = c^T x$. Então, x e p são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respect.

   Prova:

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 2:

1. Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect., tais que $b^T p = c^T x$. Então, x e p são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respect.

   Prova: Temos que existem x e p factíveis tais que $b^T p = c^T x$.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 2:

1. Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect., tais que $b^T p = c^T x$. Então, x e p são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respect.

   Prova: Temos que existem x e p factíveis tais que $b^T p = c^T x$. Por outro lado, pelo teorema da dualidade fraca, sabemos que $b^T p \leq c^T y$, para todo y primal factível.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 2:

1. Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect., tais que $b^T p = c^T x$. Então, x e p são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respect.

   Prova: Temos que existem x e p factíveis tais que $b^T p = c^T x$. Por outro lado, pelo teorema da dualidade fraca, sabemos que $b^T p \leq c^T y$, para todo y primal factível. Logo, $c^T x \leq c^T y$ para todo y primal factível e, portanto,

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 2:

1. Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect., tais que $b^T p = c^T x$. Então, x e p são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respect.

   Prova: Temos que existem x e p factíveis tais que $b^T p = c^T x$. Por outro lado, pelo teorema da dualidade fraca, sabemos que $b^T p \leq c^T y$, para todo y primal factível. Logo, $c^T x \leq c^T y$ para todo y primal factível e, portanto, x é ótimo primal.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 2:

1. Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect., tais que $b^T p = c^T x$. Então, x e p são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respect.

   Prova: Temos que existem x e p factíveis tais que $b^T p = c^T x$. Por outro lado, pelo teorema da dualidade fraca, sabemos que $b^T p \leq c^T y$, para todo y primal factível. Logo, $c^T x \leq c^T y$ para todo y primal factível e, portanto, x é ótimo primal. De forma análoga, sabemos que $b^T q \leq c^T x$, para todo q dual factível.

Dualidade

▷ Propriedades

Corolário 2:

1. Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect., tais que $b^T p = c^T x$. Então, x e p são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respect.

   Prova: Temos que existem x e p factíveis tais que $b^T p = c^T x$. Por outro lado, pelo teorema da dualidade fraca, sabemos que $b^T p \leq c^T y$, para todo y primal factível. Logo, $c^T x \leq c^T y$ para todo y primal factível e, portanto, x é ótimo primal. De forma análoga, sabemos que $b^T q \leq c^T x$, para todo q dual factível. Logo, $b^T q \leq b^T p$, para todo q dual factível e, portanto, p é ótimo dual.

Dualidade

▷ Propriedades

Observação:

- O Corolário 1 considera que um dos problema é factível;

Dualidade

▷ Propriedades

Observação:

- O Corolário 1 considera que um dos problema é factível;
- Deve-se tomar o cuidado para não interpretá-lo de forma incorreta;

Dualidade

▷ Propriedades

Observação:

- O Corolário 1 considera que um dos problema é factível;
- Deve-se tomar o cuidado para não interpretá-lo de forma incorreta;
- Se o dual é infactível, o que podemos afirmar sobre o primal?

Dualidade

▷ Propriedades

Observação:

- O Corolário 1 considera que um dos problema é factível;
- Deve-se tomar o cuidado para não interpretá-lo de forma incorreta;
- Se o dual é infactível, o que podemos afirmar sobre o primal?
  Pode ser ilimitado ou *infactível*!

Dualidade

▷ Propriedades

Observação:

- O Corolário 1 considera que um dos problema é factível;
- Deve-se tomar o cuidado para não interpretá-lo de forma incorreta;
- Se o dual é infactível, o que podemos afirmar sobre o primal?
  Pode ser ilimitado ou *infactível*!
- Exemplo de ambos infactíveis:

Dualidade

▷ Propriedades

Observação:

- O Corolário 1 considera que um dos problema é factível;
- Deve-se tomar o cuidado para não interpretá-lo de forma incorreta;
- Se o dual é infactível, o que podemos afirmar sobre o primal? Pode ser ilimitado ou *infactível*!
- Exemplo de ambos infactíveis:

$$\min_{x_1 \geq 0} \{-x_1 \mid 0x_1 = 1\} \qquad \max_{p_1 \in \mathbb{R}} \{p_1 \mid 0p_1 \leq -1\}$$

Dualidade

▷ Propriedades

Outro exemplo de primal e dual infactíveis:

$$\begin{array}{lc} \text{min} & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lc} \text{max} & p_1 + 3p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 = 1 \\ & p_1 + 2p_2 = 2 \end{array}$$

Dualidade

▷ Propriedades

Outro exemplo de primal e dual infactíveis:

$$\begin{array}{rc} \text{min} & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rc} \text{max} & p_1 + 3p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 = 1 \\ & p_1 + 2p_2 = 2 \end{array}$$

- Assim, *existe ótimo primal se, e somente se, existir ótimo dual!*

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade forte.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade forte.

- Se um problema de programação linear tem solução ótima, então seu dual também tem, e os respectivos valores ótimos são iguais.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Dualidade forte.

- Se um problema de programação linear tem solução ótima, então seu dual também tem, e os respectivos valores ótimos são iguais.

  Prova: (mais à frente).

Dualidade

▷ Propriedades

Problema primal	Problema dual
$\min \quad f(x) = c^T x$	$\max \quad g(p) = b^T p$
$\text{s.a} \quad Ax = b$	$\text{s.a} \quad A^T p \leq c$
$x \geq 0$	

Dualidade

▷ Propriedades

Problema primal	Problema dual
$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} \text{max} \quad & g(p) = b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \leq c \\ & p \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

  (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0,\ i = 1, \ldots, m;$

  (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n.$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

  (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0, \; i = 1, \ldots, m;$

  (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0, \; j = 1, \ldots, n.$

  Prova:

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

  (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0, \; i = 1, \ldots, m;$
  (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0, \; j = 1, \ldots, n.$

  Prova: ($\Rightarrow$) Para todo x primal factível e p dual factível, temos que $p_i(A_i^T x - b_i) \geq 0$ e $(c_j - p^T a_j)x_j \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

  (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0,\ i = 1, \ldots, m;$
  (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n.$

Prova: ($\Rightarrow$) Para todo x primal factível e p dual factível, temos que $p_i(A_i^T x - b_i) \geq 0$ e $(c_j - p^T a_j)x_j \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Além disso, temos

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(A_i^T x - b_i) + \sum_{j=1}^{n} (c_j - p^T a_j)x_j$$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respect. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

  (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0,\ i = 1, \dots, m;$

  (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0,\ j = 1, \dots, n.$

  Prova: ($\Rightarrow$) Para todo x primal factível e p dual factível, temos que $p_i(A_i^T x - b_i) \geq 0$ e $(c_j - p^T a_j)x_j \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Além disso, temos

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(A_i^T x - b_i) + \sum_{j=1}^{n} (c_j - p^T a_j)x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i A_i^T x - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{j=1}^{n} p^T a_j x_j$$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- (cont...)

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- (cont...)

$$= p^T Ax - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - p^T Ax$$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- (cont...)

$$= p^T Ax - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - p^T Ax = c^T x - b^T p.$$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- (cont...)

$$= p^T Ax - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - p^T Ax = c^T x - b^T p.$$

Se x e p são soluções ótimas primal e dual, então pelo teorema de dualidade forte, temos que $c^T x = b^T p$.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- (cont...)

$$= p^T Ax - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - p^T Ax = c^T x - b^T p.$$

Se x e p são soluções ótimas primal e dual, então pelo teorema de dualidade forte, temos que $c^T x = b^T p$. Logo, as igualdades acima implicam em $p_i(A_i^T x - b_i) = 0$ e $(c_j - p^T a_j)x_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- (cont...)

$$= p^T Ax - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - p^T Ax = c^T x - b^T p.$$

Se x e p são soluções ótimas primal e dual, então pelo teorema de dualidade forte, temos que $c^T x = b^T p$. Logo, as igualdades acima implicam em $p_i(A_i^T x - b_i) = 0$ e $(c_j - p^T a_j)x_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. *[soma de parcelas maiores ou iguais a zero, com resultado igual a zero, implica em cada parcela igual a zero]*

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- (cont...)

$$= p^T Ax - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - p^T Ax = c^T x - b^T p.$$

Se x e p são soluções ótimas primal e dual, então pelo teorema de dualidade forte, temos que $c^T x = b^T p$. Logo, as igualdades acima implicam em $p_i(A_i^T x - b_i) = 0$ e $(c_j - p^T a_j)x_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. *[soma de parcelas maiores ou iguais a zero, com resultado igual a zero, implica em cada parcela igual a zero]*

($\Leftarrow$) Se as igualdades (i) e (ii) são satisfeitas, então

$$0 = \sum_{i=1}^{m} p_i(A_i^T x - b_i) + \sum_{j=1}^{n}(c_j - p^T a_j)x_j = c^T x - b^T p.$$

Dualidade

▷ Propriedades

Teorema: Folgas complementares.

- (cont...)

$$= p^T Ax - \sum_{i=1}^{m} p_i b_i + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - p^T Ax = c^T x - b^T p.$$

Se x e p são soluções ótimas primal e dual, então pelo teorema de dualidade forte, temos que $c^T x = b^T p$. Logo, as igualdades acima implicam em $p_i(A_i^T x - b_i) = 0$ e $(c_j - p^T a_j)x_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. *[soma de parcelas maiores ou iguais a zero, com resultado igual a zero, implica em cada parcela igual a zero]*

$(\Leftarrow)$ Se as igualdades (i) e (ii) são satisfeitas, então $0 = \sum_{i=1}^{m} p_i(A_i^T x - b_i) + \sum_{j=1}^{n} (c_j - p^T a_j)x_j = c^T x - b^T p$. Logo, pelo Corolário 2, temos que x e p são soluções ótimas primal e dual, respect.

Folgas Complementares

▷ Exercício

Considere o par primal-dual de problemas a seguir. Usando a solução ótima dual $p^* = (0; 0{,}5)$, determine uma solução ótima para o problema primal (sem resolvê-lo diretamente).

$$
\begin{array}{llcll}
\text{min} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 & \qquad & \text{max} & g(p_1, p_2) = 9p_1 + 12p_2 \\
\text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 & & \text{s.a} & -2p_1 + 3p_2 \leq 2 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 & & & 3p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & & & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$p_1$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9)$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) \quad = \quad 0$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$
\begin{aligned}
p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\
p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0
\end{aligned}
$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$
\begin{aligned}
p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\
p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\
(2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\
(1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

- Sabemos que a solução ótima dual é $p^* = (0, 0.5)$.

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$
\begin{aligned}
p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\
p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\
(2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\
(1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

- Sabemos que a solução ótima dual é $p^* = (0, 0.5)$. Dado que $p_2 > 0$, devemos ter $(3x_1 + 2x_2) - 12 = 0$.

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Sabemos que a solução ótima dual é $p^* = (0, 0.5)$. Dado que $p_2 > 0$, devemos ter $(3x_1 + 2x_2) - 12 = 0$. Além disso, substituindo essa solução nas duas últimas equações, obtemos:

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Sabemos que a solução ótima dual é $p^* = (0, 0.5)$. Dado que $p_2 > 0$, devemos ter $(3x_1 + 2x_2) - 12 = 0$. Além disso, substituindo essa solução nas duas últimas equações, obtemos:

$$(2 - 1.5)x_1 = 0$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Sabemos que a solução ótima dual é $p^* = (0, 0.5)$. Dado que $p_2 > 0$, devemos ter $(3x_1 + 2x_2) - 12 = 0$. Além disso, substituindo essa solução nas duas últimas equações, obtemos:

$$(2 - 1.5)x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Sabemos que a solução ótima dual é $p^* = (0, 0.5)$. Dado que $p_2 > 0$, devemos ter $(3x_1 + 2x_2) - 12 = 0$. Além disso, substituindo essa solução nas duas últimas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} (2 - 1.5)x_1 &= 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \\ (1 - 1)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$
\begin{aligned}
p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\
p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\
(2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\
(1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

- Sabemos que a solução ótima dual é $p^* = (0, 0.5)$. Dado que $p_2 > 0$, devemos ter $(3x_1 + 2x_2) - 12 = 0$. Além disso, substituindo essa solução nas duas últimas equações, obtemos:

$$
\begin{aligned}
(2 - 1.5)x_1 &= 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\
(1 - 1)x_2 &= 0 \Rightarrow x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Logo, juntando esses resultados, obtemos: $(3 * 0 + 2x_2) - 12 = 0$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Logo, juntando esses resultados, obtemos:
$(3 * 0 + 2x_2) - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 2x_2 - 12 = 0$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Logo, juntando esses resultados, obtemos:
  $(3 * 0 + 2x_2) - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 2x_2 - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 6;$

Folgas Complementares

▷ Exercício

- Pelo Teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{aligned} p_1((-2x_1 + 3x_2) - 9) &= 0 \\ p_2((3x_1 + 2x_2) - 12) &= 0 \\ (2 - (-2p_1 + 3p_2))x_1 &= 0 \\ (1 - (3p_1 + 2p_2))x_2 &= 0 \end{aligned}$$

- Logo, juntando esses resultados, obtemos:
  $(3 * 0 + 2x_2) - 12 = 0 \;\Rightarrow\; 2x_2 - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 6;$
- Portanto, $x^* = (0, 6)$ é uma solução ótima do problema primal.

Folgas Complementares

▷ Exercício

Considere o problema de programação linear abaixo. Determine o problema dual correspondente e uma solução ótima, sabendo-se que $x^* = (1, 0, 1)$ é uma solução ótima do problema abaixo.

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

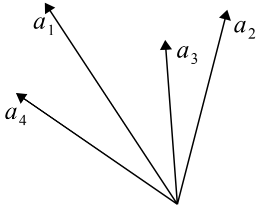
▷ Propriedades

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Dualidade

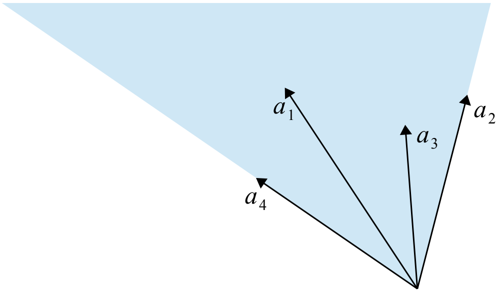
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Representação vetorial das colunas de $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$;

Dualidade

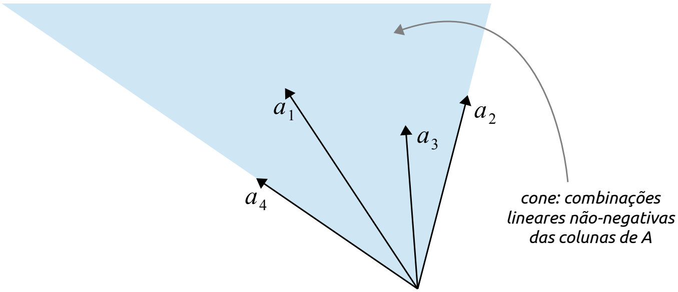
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Representação vetorial das colunas de $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$;

Dualidade

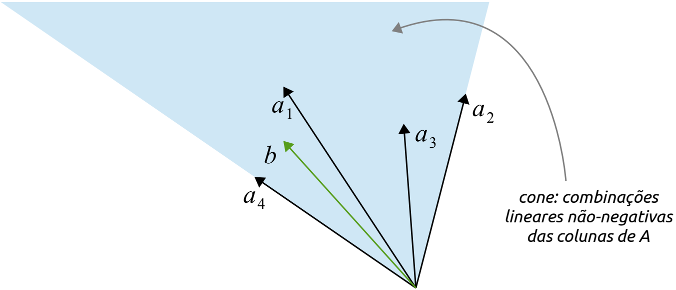
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Cone formado pelas colunas a_1, a_2, a_3, a_4;

Dualidade

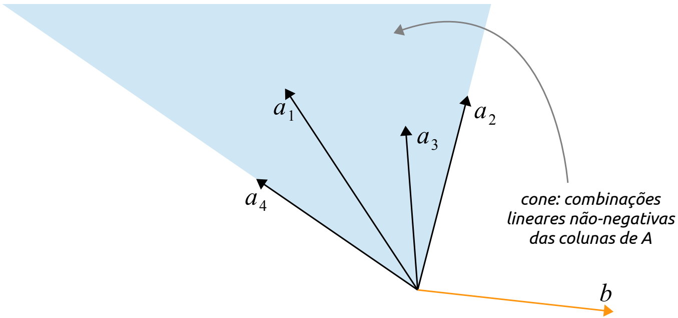
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Caso 1: b pertence ao cone (i.e., pode ser escrito como uma combinação linear positiva das colunas de A);

Dualidade

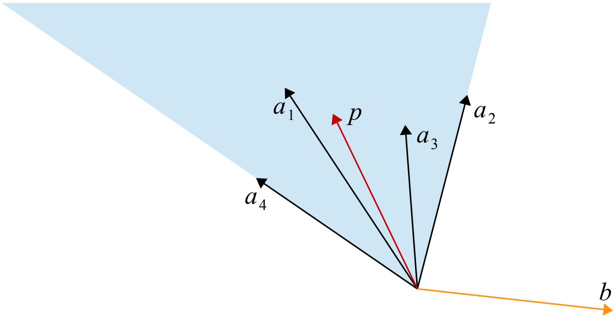
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Caso 2: b *não* pertence ao cone (i.e., *não* pode ser escrito como uma combinação linear positiva das colunas de A);

Dualidade

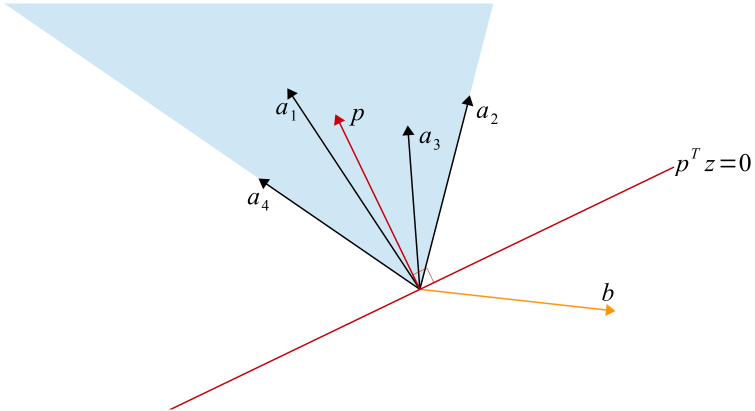
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Caso 2: Então existe p

Dualidade

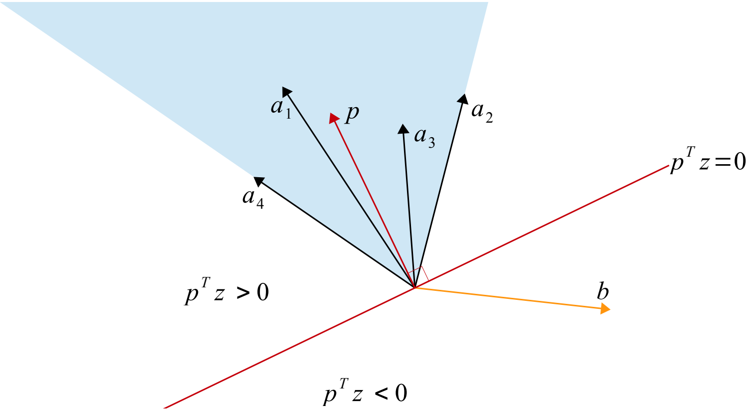
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Caso 2: Então existe p tal que $p^t z = 0$ é *hiperplano separador*;

Dualidade

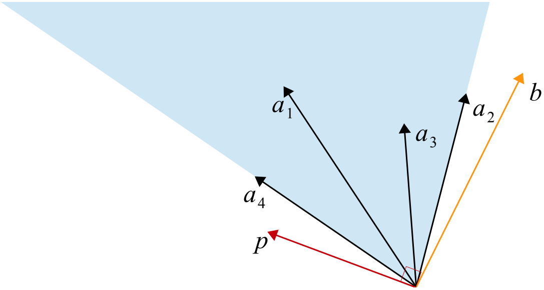
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Caso 2: Então existe p tal que $p^t z = 0$ é *hiperplano separador* (i.e., $p^T a_i \geq 0$ e $p^T b < 0$);

Dualidade

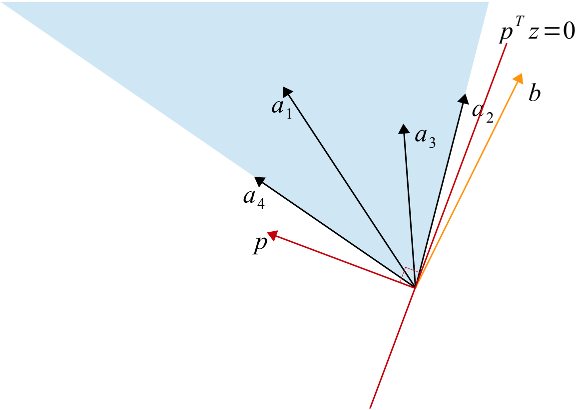
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Caso 2: Então existe p tal que $p^t z = 0$ é *hiperplano separador* (i.e., $p^T a_i \geq 0$ e $p^T b < 0$);

Dualidade

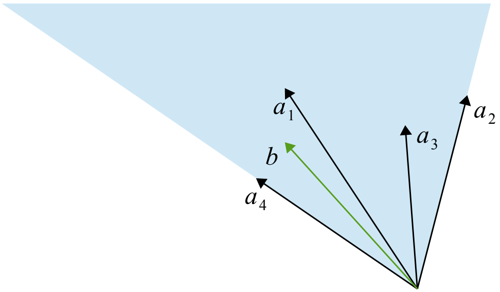
▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Caso 2: Então existe p tal que $p^t z = 0$ é *hiperplano separador* (i.e., $p^T a_i \geq 0$ e $p^T b < 0$);

Dualidade

▷ Lema de Farkas: Ilustração



- Caso 1: b pertence ao cone e, logo, não existe hiperplano separador.

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Prova:

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Prova: Vamos assumir que a afirmação 1 é **verdadeira**: existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$.

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Prova: Vamos assumir que a afirmação 1 é **verdadeira**: existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Assim, $p^T b =$

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Prova: Vamos assumir que a afirmação 1 é **verdadeira**: existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Assim, $p^T b = p^T Ax$.

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Prova: Vamos assumir que a afirmação 1 é **verdadeira**: existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Assim, $p^T b = p^T Ax$. Se tivermos que $p^T A \geq 0$, então $p^T Ax \geq 0$, pois $x \geq 0$.

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Prova: Vamos assumir que a afirmação 1 é **verdadeira**: existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Assim, $p^T b = p^T Ax$. Se tivermos que $p^T A \geq 0$, então $p^T Ax \geq 0$, pois $x \geq 0$. Logo, $p^T b \geq 0$

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Prova: Vamos assumir que a afirmação 1 é **verdadeira**: existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Assim, $p^T b = p^T Ax$. Se tivermos que $p^T A \geq 0$, então $p^T Ax \geq 0$, pois $x \geq 0$. Logo, $p^T b \geq 0$ e portanto a segunda afirmação não pode ser válida!

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- *Prova:* (cont...)

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- *Prova:* (cont...) Vamos assumir agora que a afirmação 1 é **falsa**: não existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$.

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- *Prova:* (cont...) Vamos assumir agora que a afirmação 1 é **falsa**: não existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Seja o seguinte par primal-dual de problemas:

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- *Prova:* (cont...) Vamos assumir agora que a afirmação 1 é **falsa**: não existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Seja o seguinte par primal-dual de problemas:

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{ll} \min & b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{ll} \max & 0^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- *Prova:* (cont...) Vamos assumir agora que a afirmação 1 é **falsa**: não existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Seja o seguinte par primal-dual de problemas:

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{ll} \min & b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{ll} \max & 0^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Por hipótese, o problema (ii) é infactível, o que implica que o problema (i) seja ilimitado ou também infactível.

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- *Prova:* (cont...) Vamos assumir agora que a afirmação 1 é **falsa**: não existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Seja o seguinte par primal-dual de problemas:

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{ll} \min & b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \begin{array}{ll} \max & 0^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Por hipótese, o problema (ii) é infactível, o que implica que o problema (i) seja ilimitado ou também infactível. Como $p = 0$ é uma solução factível para (i), então esse problema só pode ser ilimitado, i.e. $b^T p \to -\infty$.

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- *Prova:* (cont...) Vamos assumir agora que a afirmação 1 é **falsa**: não existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Seja o seguinte par primal-dual de problemas:

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} \min \quad & b^T p \\ \text{s.a} \quad & A^T p \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} \max \quad & 0^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Por hipótese, o problema (ii) é infactível, o que implica que o problema (i) seja ilimitado ou também infactível. Como $p = 0$ é uma solução factível para (i), então esse problema só pode ser ilimitado, i.e. $b^T p \to -\infty$. Portanto, existe algum $p \in \mathbb{R}^m$ que é factível (i.e. $A^T p \geq 0$)

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- *Prova:* (cont...) Vamos assumir agora que a afirmação 1 é **falsa**: não existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$. Seja o seguinte par primal-dual de problemas:

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{ll} \min & b^T p \\ \text{s.a} & A^T p \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{ll} \max & 0^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Por hipótese, o problema (ii) é infactível, o que implica que o problema (i) seja ilimitado ou também infactível. Como $p = 0$ é uma solução factível para (i), então esse problema só pode ser ilimitado, i.e. $b^T p \to -\infty$. Portanto, existe algum $p \in \mathbb{R}^m$ que é factível (i.e. $A^T p \geq 0$) e cujo custo é negativo (i.e. $b^T p < 0$).

Lema de Farkas

Teorema: Lema de Farkas.

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $p^T A \geq 0$ e $p^T b < 0$.

Lema de Farkas

Obs.: O resultado é válido mesmo quando primal e dual são infactíveis:

$$\begin{array}{rc} \text{min} & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rc} \text{max} & p_1 + 3p_2 \\ \text{s.a} & p_1 + 2p_2 = 1 \\ & p_1 + 2p_2 = 2 \end{array}$$

Lema de Farkas

Obs.: O resultado é válido mesmo quando primal e dual são infactíveis:

$$\begin{array}{rc}
\text{min} & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 = 1 \\
& 2x_1 + 2x_2 = 3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rc}
\text{max} & p_1 + 3p_2 \\
\text{s.a} & p_1 + 2p_2 = 1 \\
& p_1 + 2p_2 = 2
\end{array}$$

Exercício: Verifique!

Lema de Farkas

▷ Verificação

- Para aplicarmos o Lema, precisamos colocar o problema primal na forma padrão.

Lema de Farkas

▷ Verificação

- Para aplicarmos o Lema, precisamos colocar o problema primal na forma padrão. Assim:

$$
\begin{array}{rc}
\text{min} & x_1^+ - x_1^- + 2x_2^+ - 2x_2^- \\
\text{s.a} & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^+ = 1 \\
& 2x_1^+ - 2x_1^- + 2x_2^+ - 2x_2^+ = 3 \\
& x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0
\end{array}
$$

Lema de Farkas

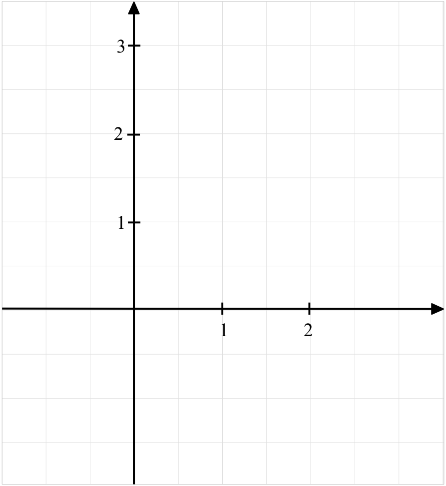
▷ Verificação

- Para aplicarmos o Lema, precisamos colocar o problema primal na forma padrão. Assim:

$$
\begin{array}{rc}
\text{min} & x_1^+ - x_1^- + 2x_2^+ - 2x_2^- \\
\text{s.a} & x_1^+ - x_1^- + x_2^+ - x_2^+ = 1 \\
 & 2x_1^+ - 2x_1^- + 2x_2^+ - 2x_2^+ = 3 \\
 & x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^- \geq 0
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{rc}
\text{max} & p_1 + 3p_2 \\
\text{s.a} & p_1 + 2p_2 \leq 1 \\
 & -p_1 - 2p_2 \leq -1 \\
 & p_1 + 2p_2 \leq 2 \\
 & -p_1 - 2p_2 \leq -2
\end{array}
$$

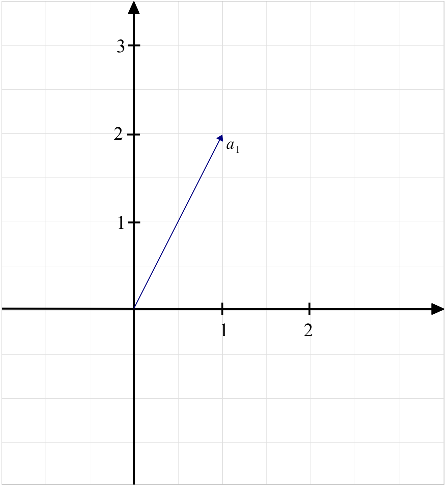
Lema de Farkas

▷ Verificação



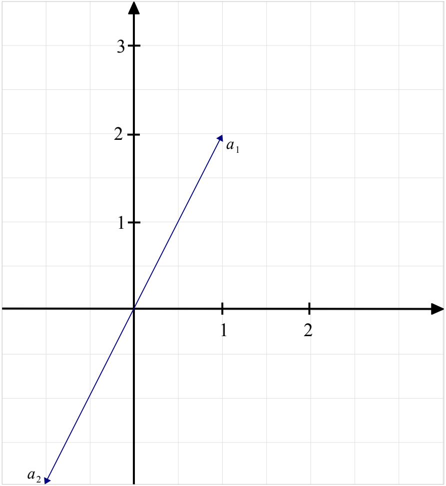
Lema de Farkas

▷ Verificação



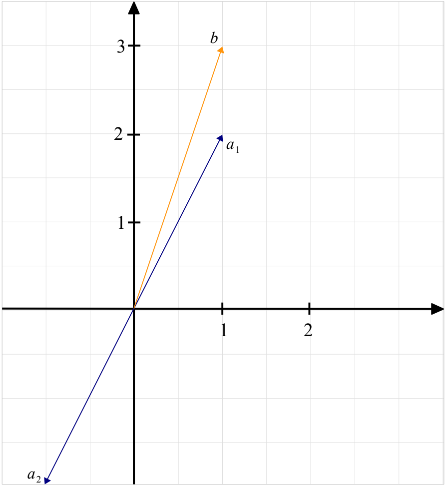
Lema de Farkas

▷ Verificação



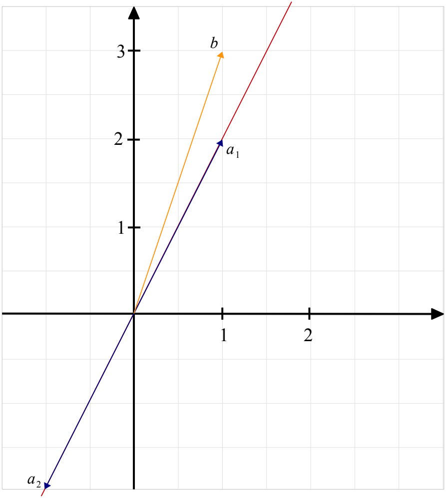
Lema de Farkas

▷ Verificação



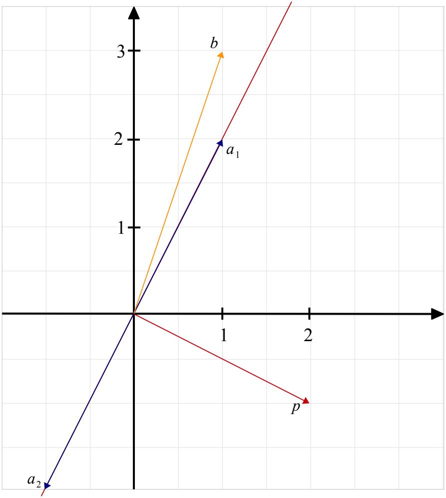
Lema de Farkas

▷ Verificação



Lema de Farkas

▷ Verificação



Lema de Farkas

▷ Forma alternativa

Teorema: Lema de Farkas. (Forma 2)

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $r \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T r \leq 0$ e $b^T r > 0$.

Lema de Farkas

▷ Forma alternativa

Teorema: Lema de Farkas. (Forma 2)

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $x \geq 0$ tal que $Ax = b$;
  2. Existe algum vetor $r \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T r \leq 0$ e $b^T r > 0$.

(De fato, se existe r que satisfaz a condição 2 da forma original, então $r = -p$ satisfaz a condição 2 da Forma 2; A diferença é que desta forma, podemos dizer que r é um raio de subida no espaço dual)

Lema de Farkas

▷ Interpretação

- Se existe $r \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T r \leq 0$ e $b^T r > 0$, então r é um *raio de subida* no espaço dual (se for factível); (i.e. dual ilimitado)

Definição: Raio.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{p \in \mathbb{R}^m | A^T p \leq c\}$. O vetor $r \in \mathcal{S}$ é chamado de *raio* quando satisfaz $p + \varepsilon r \in \mathcal{S}$, para todo $p \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$.
  (Analise o que ocorre com $A^T(p + \varepsilon r) \leq c$, para todo $\varepsilon \geq 0$)

Lema de Farkas

▷ Interpretação

- Se existe $r \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T r \leq 0$ e $b^T r > 0$, então r é um *raio de subida* no espaço dual (se for factível); (i.e. dual ilimitado)

Lema de Farkas

▷ Interpretação

- Se existe $r \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T r \leq 0$ e $b^T r > 0$, então r é um *raio de subida* no espaço dual (se for factível); (i.e. dual ilimitado)

Definição: Raio de subida.

- Considere o poliedro $\mathcal{S} = \{p \in \mathbb{R}^m | A^T p \leq c\}$ contendo um raio $r \in \mathcal{S}$. Seja $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear arbitrário. Se $g(p + \varepsilon r) > g(p)$, para todo $p \in \mathcal{S}$ e escalar $\varepsilon \geq 0$, então r é chamado de *raio de subida* de g. *(Analise o que ocorre com $b^T(p + \varepsilon r)$, para todo $\varepsilon \geq 0$)*

Lema de Farkas

▷ Forma alternativa

Teorema: Lema de Farkas. (Forma 3)

Lema de Farkas

▷ Forma alternativa

Teorema: Lema de Farkas. (Forma 3)

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:

Lema de Farkas

▷ Forma alternativa

Teorema: Lema de Farkas. (Forma 3)

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $r \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ar = 0$, $c^T r < 0$ e $r \geq 0$;

Lema de Farkas

▷ Forma alternativa

Teorema: Lema de Farkas. (Forma 3)

- Sejam A uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Então, exatamente uma das afirmações a seguir é válida:
  1. Existe algum $r \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ar = 0$, $c^T r < 0$ e $r \geq 0$;
  2. Existe algum $p \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^T p \leq c$.

(Ou seja: ou o dual é factível (afirmação 2), ou existe um raio de descida no primal (se esse for factível))

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?