Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 3.1: Condições de otimalidade e os métodos de programação linear

Objetivos deste tópico

- Estudar condições de otimalidade também conhecidas como condições KKT;
- Entender como os métodos de programação linear se derivam a partir dessas condições.

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

Teorema: Folgas Complementares.

- Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respectivamente. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

  (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0, \; i = 1, \ldots, m;$

  (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0, \; j = 1, \ldots, n.$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
  (sem perda de generalidade)

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
  (sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
  (sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:
- *Sejam x e p soluções factíveis dos problemas primal e dual, respectivamente. Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,*

  (i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0, \ i = 1, \dots, m;$

  (ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0, \ j = 1, \dots, n.$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
  (sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:

- *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^m$ tais que*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ A^T p &\leq c \end{aligned}$$

Os vetores x e p são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,

(i) $p_i(A_i^T x - b_i) = 0, \; i = 1, \ldots, m;$

(ii) $(c_j - p^T a_j)x_j = 0, \; j = 1, \ldots, n.$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
  (sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:

- *Sejam* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $p \in \mathbb{R}^m$ *tais que*

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ A^T p &\leq c \end{aligned}$$

Os vetores x *e* p *são soluções ótimas dos respectivos problemas se, e somente se,* $(c_j - p^T a_j)x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Considere o problema primal na forma padrão;
  (sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:

  Os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^m$ são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respectivamente, se e somente se, satisfazem

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^T p &\leq c \\
(c_j - p^T a_j) x_j &= 0, \; j = 1, \ldots, n, \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Considere os problemas primal e dual na forma padrão; (sem perda de generalidade)
- Vamos reescrever o Teorema das Folgas Complementares:

Os vetores $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^m$ e $s \in \mathbb{R}^n$ são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respectivamente, se e somente se, satisfazem

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T p + s &= c \\ s_j x_j &= 0, \; j = 1, \ldots, n \\ x, s &\geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

  Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

  Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T p + s &= c \\ s_j x_j &= 0, \;\; j = 1, \ldots, n \\ x, s &\geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

  Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T p + s &= c \\ s_j x_j &= 0, \ j = 1, \ldots, n \\ x, s &\geq 0 \end{aligned}$$

- Em programação linear, temos que as condições KKT são necessárias e suficientes para otimalidade;

Dualidade

▷ Condições de otimalidade

- Com isso, nós acabamos de deduzir um dos principais resultados em Otimização (linear e não-linear):

  Condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker)

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^T p + s &= c \\
s_j x_j &= 0, \;\; j = 1, \ldots, n \\
x, s &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Em programação linear, temos que as condições KKT são necessárias e suficientes para otimalidade;
- Para problemas de otimização em geral, são condições necessárias apenas (e podem exigir algumas condições a mais).

Dualidade

▷ Condições KKT

"When Kuhn and Tucker proved the Kuhn-Tucker theorem in 1950 they launched the theory of non-linear programming. However, in a sense this theorem had been proven already: In 1939 by W. Karush in a master's thesis, which was unpublished; in 1948 by F. John in a paper that was at first rejected by the Duke Mathematical Journal; and possibly earlier by Ostrogradsky and Farkas."

Kjeldsen, T.H. *A Contextualized Historical Analysis of the Kuhn-Tucker Theorem in Nonlinear Programming: The Impact of World War II.* Historia Mathematica 27(4), 331–361, 2000.

Dualidade

▷ Condições KKT

Considere o problema de Otimização (geral)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, \ldots, x_n) \\
\text{s.a} \quad & h_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\
& \vdots \\
& h_l(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\
& g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \\
& \vdots \\
& g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Condições KKT

Considere o problema de Otimização (geral)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Dualidade

▷ Condições KKT

Considere o problema de Otimização (geral)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definimos a função Lagrangiana do problema:

$$\mathcal{L}(x, p, s) = f(x) + p^T h(x) + s^T g(x)$$

com $s^T \geq 0$.

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1),

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas.

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) = 0$$

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\ h_k(x) &= 0,\ k = 1, \ldots, l \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x,p,s) &= 0 \\ h_k(x) &= 0, \ k = 1,\ldots,l \\ g_j(x) &\leq 0, \ j = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\ h_k(x) &= 0, \; k = 1, \ldots, l \\ g_j(x) &\leq 0, \; j = 1, \ldots, m \\ s_j g_j(x) &= 0, \; j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade (qualificação) sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\
h_k(x) &= 0, \;\; k = 1, \ldots, l \\
g_j(x) &\leq 0, \;\; j = 1, \ldots, m \\
s_j g_j(x) &= 0, \;\; j = 1, \ldots, m \\
s_j &\geq 0, \;\; j = 1, \ldots, m
\end{aligned}$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) =$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) = c^T x$;

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) = c^T x$;
  $h(x) =$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) = c^T x$;
  $h(x) = b - Ax$;

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) = c^T x$;
  $h(x) = b - Ax$;
  $g_j(x) =$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) = c^T x;$
  $h(x) = b - Ax;$
  $g_j(x) = -x_j, \; j = 1, \ldots, n;$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) = c^T x;$
  $h(x) = b - Ax;$
  $g_j(x) = -x_j,\ j = 1, \ldots, n;$
  $\mathcal{L}(x, p, s) =$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:

  $f(x) = c^T x;$

  $h(x) = b - Ax;$

  $g_j(x) = \ -x_j,\ j = 1, \ldots, n;$

  $\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T (b - Ax) - s^T (x)$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:

  $f(x) = c^T x;$

  $h(x) = b - Ax;$

  $g_j(x) = \; - x_j, \; j = 1, \ldots, n;$

  $\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T (b - Ax) - s^T (x)$

  $\Rightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) =$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:

  $f(x) = c^T x;$

  $h(x) = b - Ax;$

  $g_j(x) = \; - x_j, \;\; j = 1, \ldots, n;$

  $\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T (b - Ax) - s^T (x)$

  $\Rightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) = c - A^T p - s$

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) = c^T x$;
  $h(x) = b - Ax$;
  $g_j(x) = \ -x_j,\ j = 1, \ldots, n$;
  $\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T(b - Ax) - s^T(x)$
  $\Rightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) = c - A^T p - s$
- Além disso, as condições de regularidade são sempre satisfeitas;

Dualidade

▷ Condições KKT

- No caso particular de programação linear, temos:
  $f(x) = c^T x;$
  $h(x) = b - Ax;$
  $g_j(x) = \ -x_j, \ j = 1, \ldots, n;$
  $\mathcal{L}(x, p, s) = c^T x + p^T(b - Ax) - s^T(x)$
  $\Rightarrow \nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) = c - A^T p - s$
- Além disso, as condições de regularidade são sempre satisfeitas;
- Pela dualidade forte, as condições são também suficientes.

Dualidade

▷ Condições KKT

Teorema: Condições necessárias de primeira ordem (condições KKT).

- Suponha que x seja um ótimo local do problema de otimização (1), que as funções f, g e h sejam continuamente diferenciáveis e que certas condições de regularidade sejam válidas. Então existe um vetor de multiplicadores de Lagrange (p, s) tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
\nabla_x \mathcal{L}(x, p, s) &= 0 \\
h_k(x) &= 0, \ k = 1, \ldots, l \\
g_j(x) &\leq 0, \ j = 1, \ldots, m \\
s_j g_j(x) &= 0, \ j = 1, \ldots, m \\
s_j &\geq 0, \ j = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Condições KKT

- Assim, a teoria dos multiplicadores de Lagrange é a base da teoria de dualidade;

Dualidade

▷ Condições KKT

- Assim, a teoria dos multiplicadores de Lagrange é a base da teoria de dualidade;
- Que por sua vez é a base das condições KKT;

Dualidade

▷ Condições KKT

- Assim, a teoria dos multiplicadores de Lagrange é a base da teoria de dualidade;
- Que por sua vez é a base das condições KKT;
- Que por sua vez são a base dos métodos de solução em otimização.

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$\begin{aligned} Ax &= b && (2)\\ A^T p + s &= c && (3)\\ s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\ x, s &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

- Onde está a dificuldade?

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$\begin{aligned} Ax &= b && (2)\\ A^T p + s &= c && (3)\\ s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\ x, s &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b & (2)\\
A^T p + s &= c & (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n & (4)\\
x, s &\geq 0 & (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$\begin{aligned} Ax &= b & (2) \\ A^T p + s &= c & (3) \\ s_j x_j &= 0,\ j = 1, \dots, n & (4) \\ x, s &\geq 0 & (5) \end{aligned}$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$).

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \tag{2}$$
$$A^T p + s = c \tag{3}$$
$$s_j x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n \tag{4}$$
$$x, s \geq 0 \tag{5}$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$,

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$.

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos.

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
    - Método primal simplex:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
  - Método primal simplex: $x \geq 0$

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
  - Método primal simplex: $x \geq 0$ (factibilidade primal, busca-se $s \geq 0$);

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (2)\\
A^T p + s &= c && (3)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \ldots, n && (4)\\
x, s &\geq 0 && (5)
\end{aligned}
$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
  - Método primal simplex: $x \geq 0$ (factibilidade primal, busca-se $s \geq 0$);
  - Método dual simplex:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$\begin{aligned} Ax &= b && (2) \\ A^T p + s &= c && (3) \\ s_j x_j &= 0,\ j = 1, \dots, n && (4) \\ x, s &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
  - Método primal simplex: $x \geq 0$ (factibilidade primal, busca-se $s \geq 0$);
  - Método dual simplex: $s \geq 0$

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

$$Ax = b \tag{2}$$
$$A^T p + s = c \tag{3}$$
$$s_j x_j = 0, \; j = 1, \dots, n \tag{4}$$
$$x, s \geq 0 \tag{5}$$

- Onde está a dificuldade? Nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (4), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. (2) e (3) são sempre satisfeitos. Além disso, a partição deve garantir:
  - Método primal simplex: $x \geq 0$ (factibilidade primal, busca-se $s \geq 0$);
  - Método dual simplex: $s \geq 0$ (factibilidade dual, busca-se $x \geq 0$).

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \tag{6}$$
$$A^T p + s = c \tag{7}$$
$$s_j x_j = \mu, \; j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

para $\mu > 0$.

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \tag{6}$$

$$A^T p + s = c \tag{7}$$

$$s_j x_j = \mu, \; j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \to 0$.

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (6)\\
A^T p + s &= c && (7)\\
s_j x_j &= \mu, \; j = 1, \ldots, n && (8)
\end{aligned}
$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \to 0$. Além disso:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \quad (6)$$

$$A^T p + s = c \quad (7)$$

$$s_j x_j = \mu, \; j = 1, \ldots, n \quad (8)$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \to 0$. Além disso:

  - Método primal-dual:

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- Métodos de pontos interiores: Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \tag{6}$$
$$A^T p + s = c \tag{7}$$
$$s_j x_j = \mu, \; j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \to 0$. Além disso:

  - Método primal-dual: usa (6)–(8) para calcular as direções de busca.

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- **Métodos de pontos interiores:** Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$Ax = b \tag{6}$$
$$A^T p + s = c \tag{7}$$
$$s_j x_j = \mu, \; j = 1, \ldots, n \tag{8}$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \to 0$. Além disso:

  - **Método primal-dual:** usa (6)–(8) para calcular as direções de busca. É chamado *factível* quando (6) e (7) devem ser satisfeitos em toda iteração.

Dualidade

▷ Condições KKT: Métodos de solução

- **Métodos de pontos interiores:** Perturbam a dificuldade do sistema KKT:

$$\begin{aligned} Ax &= b \quad (6)\\ A^T p + s &= c \quad (7)\\ s_j x_j &= \mu, \; j = 1, \ldots, n \quad (8) \end{aligned}$$

para $\mu > 0$. Baseiam-se na direção do método de Newton para determinar direções de busca; iterativamente, o valor de μ é estritamente reduzido e, assim, $\mu \to 0$. Além disso:

  - **Método primal-dual:** usa (6)–(8) para calcular as direções de busca. É chamado *factível* quando (6) e (7) devem ser satisfeitos em toda iteração. Caso contrário, o método é chamado *infactível*.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?