Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 4.2: Inicialização do método simplex

Objetivos deste tópico

- Conhecer duas técnicas de inicialização do método (primal) simplex, usadas quando não temos uma base trivial para iniciar o método.

Método simplex: Inicialização

- Até o momento, utilizamos as variáveis de folga para compor a base inicial do método simplex;

Método simplex: Inicialização

- Até o momento, utilizamos as variáveis de folga para compor a base inicial do método simplex;
- Isso foi possível, pois a matriz básica correspondente era dada pela matriz identidade (logo, invertível) e $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = Ib \geq 0$;

Método simplex: Inicialização

- Até o momento, utilizamos as variáveis de folga para compor a base inicial do método simplex;
- Isso foi possível, pois a matriz básica correspondente era dada pela matriz identidade (logo, invertível) e $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = Ib \geq 0$;
- Na prática, uma base inicial trivial como esta pode não estar disponível;

Método simplex: Inicialização

- Até o momento, utilizamos as variáveis de folga para compor a base inicial do método simplex;
- Isso foi possível, pois a matriz básica correspondente era dada pela matriz identidade (logo, invertível) e $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = Ib \geq 0$;
- Na prática, uma base inicial trivial como esta pode não estar disponível;
- Nesse caso, como iniciar o método?

Método simplex: Inicialização

- Até o momento, utilizamos as variáveis de folga para compor a base inicial do método simplex;
- Isso foi possível, pois a matriz básica correspondente era dada pela matriz identidade (logo, invertível) e $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = Ib \geq 0$;
- Na prática, uma base inicial trivial como esta pode não estar disponível;
- Nesse caso, como iniciar o método?
- Usando o próprio método!

Método simplex: Inicialização

- Até o momento, utilizamos as variáveis de folga para compor a base inicial do método simplex;
- Isso foi possível, pois a matriz básica correspondente era dada pela matriz identidade (logo, invertível) e $x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = Ib \geq 0$;
- Na prática, uma base inicial trivial como esta pode não estar disponível;
- Nesse caso, como iniciar o método?
- Usando o próprio método! (mas modificando o problema)

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?
- E se adicionarmos uma variável artificial a cada restrição?

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?
- E se adicionarmos uma variável artificial a cada restrição?

Método simplex: Inicialização

▷ Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método simplex: Inicialização

▷ Exemplo

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + w_1 = 3 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + w_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?
- E se adicionarmos uma variável artificial a cada restrição?

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?
- E se adicionarmos uma variável artificial a cada restrição?
- O que precisamos garantir?

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?
- E se adicionarmos uma variável artificial a cada restrição?
- O que precisamos garantir? $w = 0$ na solução ótima!

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?
- E se adicionarmos uma variável artificial a cada restrição?
- O que precisamos garantir? $w = 0$ na solução ótima!
- Como?

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?
- E se adicionarmos uma variável artificial a cada restrição?
- O que precisamos garantir? $w = 0$ na solução ótima!
- Como? (i) Método das duas fases;

Método simplex: Inicialização

Considere o seguinte problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base trivial não está disponível;
- Como modificar o problema de modo a conseguir uma base trivial?
- E se adicionarmos uma variável artificial a cada restrição?
- O que precisamos garantir? $w = 0$ na solução ótima!
- Como? (i) Método das duas fases; (ii) M-grande (Big-M).

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\min \quad w_1 + \ldots + w_n$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{array}{rl} \text{min} & w_1 + \ldots + w_n \\ \text{s.a} & Ax + Iw = b \end{array}$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & w_1 + \ldots + w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & w_1 + \ldots + w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Aplicamos o método simplex, iniciando com a base dada pelas variáveis artificiais w;

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & w_1 + \ldots + w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Aplicamos o método simplex, iniciando com a base dada pelas variáveis artificiais w;
- Se uma solução ótima for obtida com valor ótimo não-nulo,

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & w_1 + \ldots + w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Aplicamos o método simplex, iniciando com a base dada pelas variáveis artificiais w;
- Se uma solução ótima for obtida com valor ótimo não-nulo, então o problema é infactível!

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & w_1 + \ldots + w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Aplicamos o método simplex, iniciando com a base dada pelas variáveis artificiais w;
- Se uma solução ótima for obtida com valor ótimo não-nulo, então o problema é infactível!
- Senão, $w = 0 \Rightarrow$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & w_1 + \ldots + w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Aplicamos o método simplex, iniciando com a base dada pelas variáveis artificiais w;
- Se uma solução ótima for obtida com valor ótimo não-nulo, então o problema é infactível!
- Senão, $w = 0 \Rightarrow$ solução obtida é factível para o problema original.

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 1

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{array}{rl} \min & w_1 + \ldots + w_n \\ \text{s.a} & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{array}$$

- Aplicamos o método simplex, iniciando com a base dada pelas variáveis artificiais w;
- Se uma solução ótima for obtida com valor ótimo não-nulo, então o problema é infactível!
- Senão, $w = 0 \Rightarrow$ solução obtida é factível para o problema original. (garantir que as variáveis artificiais não estão na base ótima)

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 2

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 2

- Usamos a base ótima obtida na Fase 1 para resolver o problema original pelo método simplex:

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases

Fase 2

- Usamos a base ótima obtida na Fase 1 para resolver o problema original pelo método simplex:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases: Exemplo

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\ & 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases: Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Fase 1

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1w_1 + 1w_2 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1w_1 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 + 1w_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases: Exemplo

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Fase 1

(Iniciamos com w_1 e w_2 na base)

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1w_1 + 1w_2 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1w_1 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 + 1w_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases: Exemplo

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\ & 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Fase 1

(Iniciamos com w_1 e w_2 na base)

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1w_1 + 1w_2 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1w_1 = 3 \\ & 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 + 1w_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{array}$$

Fase 2

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\ & 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método das duas fases: Exemplo

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Fase 1

(Iniciamos com w_1 e w_2 na base)

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1w_1 + 1w_2 \\
\text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1w_1 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 + 1w_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{array}
$$

Fase 2

(Iniciamos com a última base da Fase 1)

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

- Redefinimos a função objetivo do problema:

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\min \quad c^T x$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\min \quad c^T x + M w_1 + \ldots + M w_n$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x + M w_1 + \ldots + M w_n \\ \text{s.a} & Ax + Iw = b \end{array}$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^T x + M w_1 + \ldots + M w_n \\
\text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\
& x \geq 0, w \geq 0
\end{aligned}
$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x + M w_1 + \ldots + M w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Aplicamos o método simplex, iniciando com a base dada pelas variáveis artificiais w;

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

- Redefinimos a função objetivo do problema:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x + M w_1 + \ldots + M w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + Iw = b \\ & x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

- Aplicamos o método simplex, iniciando com a base dada pelas variáveis artificiais w;
- M é um parâmetro de entrada (fixo) que deve ser suficientemente grande para garantir $w = 0$ na solução ótima, caso o problema seja factível. (p.ex. $M = 10^5$)

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Método M-grande

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + Mw_1 + Mw_2 \\
\text{s.a} & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1w_1 \qquad\quad = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 \qquad\quad + 1w_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{array}
$$

Método simplex: Inicialização

▷ Método M-grande

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método M-grande

(Iniciamos com w_1 e w_2 na base)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1x_1 - 1x_2 + 2x_3 + Mw_1 + Mw_2 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1w_1 = 3 \\
& 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 + 1w_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método simplex: Inicialização

▷ Exercício

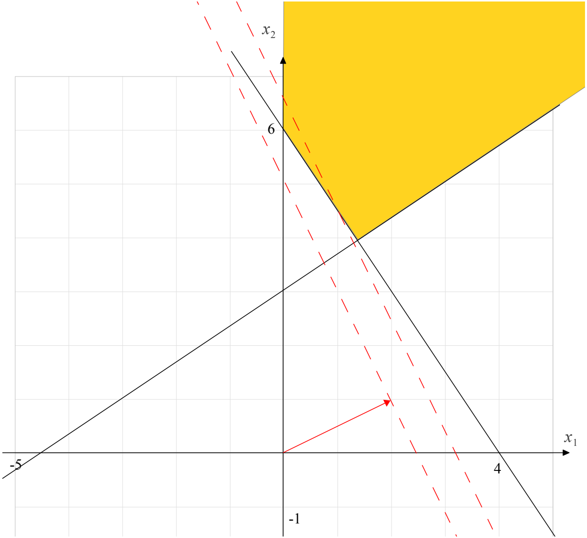
Resolva pelo método simplex, usando o método das duas fases e o método M-grande:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Método simplex: Inicialização

▷ Exercício: Ilustração

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\
& 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$



Método das duas-fases

▷ Exercício

Forma padrão:

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 1x_4 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Fase 1

(Iniciamos com x_5 e x_6 na base)

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 1x_6 \\ \text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 - 1x_3 + 1x_5 = 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 1x_4 + \quad + 1x_6 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{array}$$

Fase 2

(Iniciamos com a última base da Fase 1)

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 - 1x_4 = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{array}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1} b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 21$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 21$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 1 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \end{aligned}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 21$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 1 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \end{aligned}$$

- $s_k = s_2 \Rightarrow x_2$ entrará na base ($k = 2$).

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 21$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 1 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $s_k = s_2 \Rightarrow x_2$ entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 21$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 1 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $s_k = s_2 \Rightarrow x_2$ entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 21$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 1 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $s_k = s_2 \Rightarrow x_2$ entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} =$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 21$

- Calcular a solução básica dual:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 1 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \end{aligned}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $s_k = s_2 \Rightarrow x_2$ entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = \frac{9}{3}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 21$
- Calcular a solução básica dual:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \\ s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 1 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \end{aligned}$$

- $s_k = s_2 \Rightarrow x_2$ entrará na base $(k = 2)$.
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = \frac{9}{3}$$

- $x_{\mathcal{B}_1}(x_5)$ sairá da base $(l = 1)$.

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 6$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 6$

- Calcular a solução básica dual:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}66 & 1 \end{bmatrix} \\ s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4{,}33 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}67 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 0{,}67 \end{aligned}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 6$
- Calcular a solução básica dual:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}66 & 1 \end{bmatrix} \\ s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4{,}33 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}67 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 0{,}67 \end{aligned}$$

- $s_k = s_1 \Rightarrow x_1$ entrará na base $(k = 1)$.

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 6$

- Calcular a solução básica dual:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}66 & 1 \end{bmatrix} \\ s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4{,}33 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}67 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 0{,}67 \end{aligned}$$

- $s_k = s_1 \Rightarrow x_1$ entrará na base $(k = 1)$.
- Teste da razão:

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 6$

- Calcular a solução básica dual:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}66 & 1 \end{bmatrix} \\ s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4{,}33 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}67 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 0{,}67 \end{aligned}$$

- $s_k = s_1 \Rightarrow x_1$ entrará na base $(k = 1)$.

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} -0{,}67 \\ 4{,}33 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 6$
- Calcular a solução básica dual:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}66 & 1 \end{bmatrix} \\ s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4{,}33 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}67 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 0{,}67 \end{aligned}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $s_k = s_1 \Rightarrow x_1$ entrará na base $(k = 1)$.
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} -0{,}67 \\ 4{,}33 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} =$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 6$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}66 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4{,}33 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}67 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 0{,}67 \end{aligned}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $s_k = s_1 \Rightarrow x_1$ entrará na base ($k = 1$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} -0{,}67 \\ 4{,}33 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = \frac{6}{4{,}33}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}33 & 0 \\ -0{,}67 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 6$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}66 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -\,4{,}33 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -\,0{,}67 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 1 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 0{,}67 \end{aligned}$$

- $s_k = s_1 \Rightarrow x_1$ entrará na base $(k = 1)$.

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} -0{,}67 \\ 4{,}33 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = \frac{6}{4{,}33}$$

- $x_{\mathcal{B}_2}(x_6)$ sairá da base $(l = 2)$.

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 0$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 0$

- Calcular a solução básica dual:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 1 \\ s_6 &= c_6 - p^T a_6 = 1 \end{aligned}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 0$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 1 \\ s_6 &= c_6 - p^T a_6 = 1 \end{aligned}$$

- $s_k \geq 0$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2,1\}$ e $\mathcal{N} = \{6,5,3,4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 0$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 1 \\ s_6 &= c_6 - p^T a_6 = 1 \end{aligned}$$

- $s_k \geq 0 \Rightarrow$ PARE!

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 0$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 1 \\ s_6 &= c_6 - p^T a_6 = 1 \end{aligned}$$

- $s_k \geq 0 \Rightarrow$ PARE!
  Solução ótima DA FASE 1 encontrada!

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 0$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 &= 0 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 &= 0 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 &= 1 \\ s_6 &= c_6 - p^T a_6 &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix} \end{array}}$$

- $s_k \geq 0 \Rightarrow$ PARE!
  Solução ótima DA FASE 1 encontrada!

- Usamos a base ótima para iniciar a Fase 2.

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 3 (Fase 1)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 0$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 1 \\ s_6 &= c_6 - p^T a_6 = 1 \end{aligned}$$

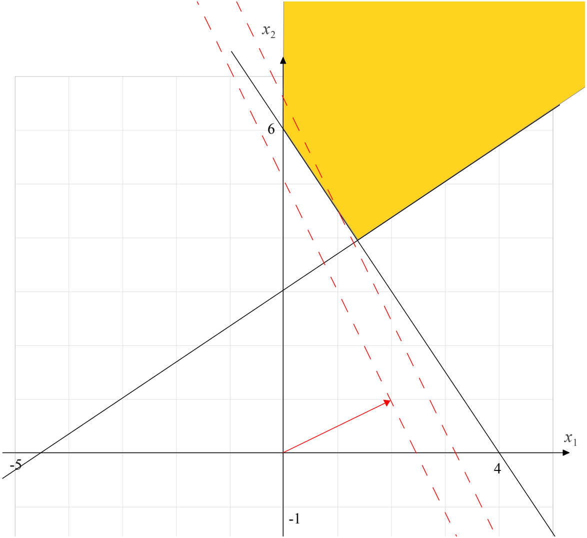
- $s_k \geq 0 \Rightarrow$ PARE!
  Solução ótima DA FASE 1 encontrada!

- Usamos a base ótima para iniciar a Fase 2.
  (podemos descartar as variáveis artificiais)

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 1 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}08 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}62 \end{aligned}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}08 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}62 \end{aligned}$$

- $s_3 < 0 \Rightarrow x_3$ entrará na base ($k = 3$).

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}08 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}62 \end{aligned}$$

- $s_3 < 0 \Rightarrow x_3$ entrará na base $(k = 3)$.
- Teste da razão:

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}08 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}62 \end{aligned}$$

- $s_3 < 0 \Rightarrow x_3$ entrará na base $(k = 3)$.
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -0{,}23 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = -0{,}08$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0{,}62$$

- $s_3 < 0 \Rightarrow x_3$ entrará na base $(k = 3)$.
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -0{,}23 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{\frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0\right\} =$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -0{,}08 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}62 \end{aligned}$$

- $s_3 < 0 \Rightarrow x_3$ entrará na base ($k = 3$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -0{,}23 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{\frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0\right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = \frac{1{,}38}{0{,}15}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 1 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = -0{,}08$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0{,}62$$

- $s_3 < 0 \Rightarrow x_3$ entrará na base ($k = 3$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} -0{,}23 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{\frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0\right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = \frac{1{,}38}{0{,}15}$$

- $x_{\mathcal{B}_2}(x_1)$ sairá da base ($l = 2$).

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 0{,}5 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}5 \end{aligned}$$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 0{,}5 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}5 \end{aligned}$$

- $s_1, s_4 \geq 0$

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2,3\}$ e $\mathcal{N} = \{1,4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 0{,}5 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}5 \end{aligned}$$

- $s_1, s_4 \geq 0 \Rightarrow$ PARE!

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2,3\}$ e $\mathcal{N} = \{1,4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = 0{,}5$$
$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = 0{,}5$$

- $s_1, s_4 \geq 0 \Rightarrow$ PARE!
  Solução ótima encontrada!

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2 (Fase 2)

$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 0{,}5 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}5 \end{aligned}$$

- $s_1, s_4 \geq 0 \Rightarrow$ PARE!
  Solução ótima encontrada!
- $x^\star = (0,\ 6,\ 9,\ 0)$;

Método das duas-fases

▷ Exercício

Iteração 2 (Fase 2)
$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 0{,}5 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}5 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

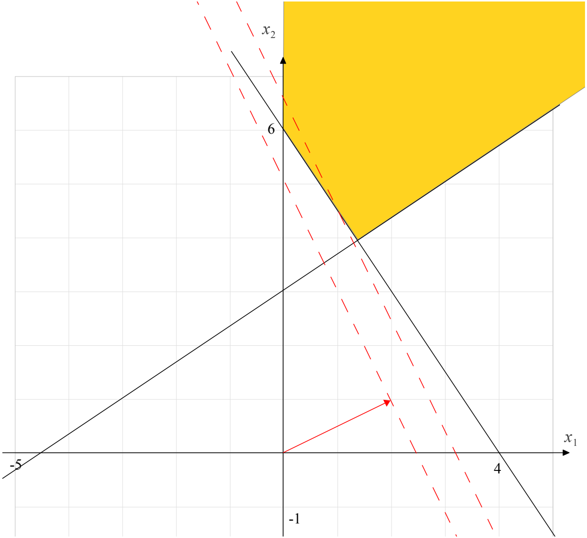
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $s_1, s_4 \geq 0 \Rightarrow$ PARE!
  Solução ótima encontrada!
- $x^\star = (0,\ 6,\ 9,\ 0)$;
- $f(x^\star) = 6$.

Método das duas-fases

▷ Exercício

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$



Método simplex: Inicialização

▷ Exercício

Resolva pelo método simplex, usando o método das duas fases e o método M-grande:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Método M-grande

▷ Exercício

Forma padrão:

$$\begin{array}{llr} \text{min} & 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \\ \text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 - 1x_3 & = 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 1x_4 & = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & \end{array}$$

Método M-grande

(Iniciamos com x_5 e x_6 na base)

$$\begin{array}{llr} \text{min} & 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6 & \\ \text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 - 1x_3 \qquad\quad + 1x_5 & = 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 1x_4 + \qquad + 1x_6 & = 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. & \end{array}$$

Método M-grande

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 2100$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -98 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -499 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 100 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 100 \end{aligned}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = \frac{9}{3}$$

- $x_{\mathcal{B}_1}(x_5)$ sairá da base ($l = 1$).

Método M-grande

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 2

$\mathcal{B} = \{2, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}333 & 0 \\ -0{,}667 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- $\hat{f}(x) = 603$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \approx \begin{bmatrix} -66{,}33 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 \approx -430{,}67 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 \approx -66{,}33 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 \approx 100 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 \approx 166{,}33 \end{aligned}$$

- x_1 entrará na base ($k = 1$).

- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} -0{,}67 \\ 4{,}33 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0 \right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = \frac{6}{4{,}33}$$

- $x_{\mathcal{B}_2} (x_6)$ sairá da base ($l = 2$).

Método M-grande

▷ Exercício

Iteração 3

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}23 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}92 \\ 1{,}38 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6{,}68$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & 0{,}62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 \approx -0{,}08 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 \approx 0{,}62 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 \approx 99{,}38 \\ s_6 &= c_6 - p^T a_6 \approx 100{,}08 \end{aligned}$$

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

- x_3 entrará na base ($k = 3$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} -0{,}23 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{x_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{\frac{x_{\mathcal{B}_i}}{y_i} \mid y_i > 0\right\} = \frac{x_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = \frac{1{,}38}{0{,}15}$$

- $x_{\mathcal{B}_2}(x_1)$ sairá da base ($l = 2$).

Método M-grande

▷ Exercício

$$\hat{c}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Iteração 4

$\mathcal{B} = \{2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{6, 5, 1, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 6$
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

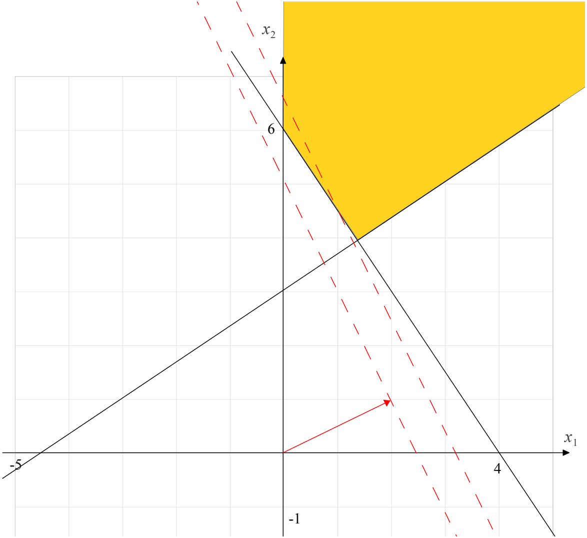
$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 0{,}5 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 0{,}5 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 \approx 100 \\ s_6 &= c_6 - p^T a_6 \approx 99{,}5 \end{aligned}$$

- $s_1, s_4, s_5, s_6 \geq 0 \Rightarrow$ PARE!
  Solução ótima encontrada!
- $x^\star = (0,\ 6,\ 9,\ 0)$;
- $f(x^\star) = 6$.

Método M-grande

▷ Exercício

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$



- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?