Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 4.3: Degeneração

Objetivos deste tópico

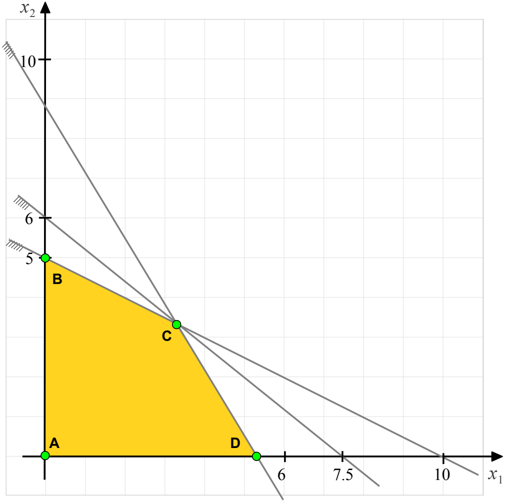
- Entender o que é degeneração em programação linear e quais as suas implicações para o método simplex.

Degeneração

- Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;

Degeneração

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 2{,}67 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Degeneração

- Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- Em uma base degenerada, temos $x_{\mathcal{B}_i} = 0$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, m$;

Degeneração

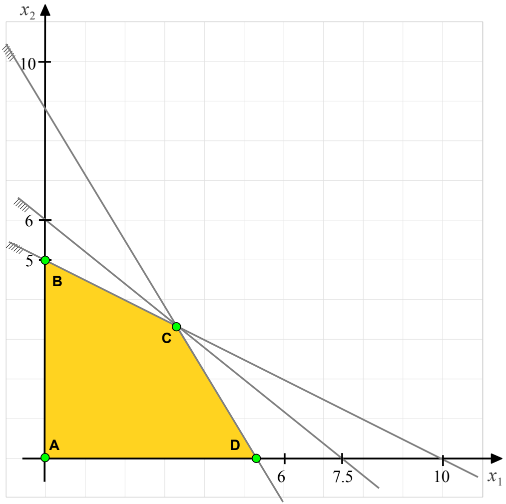
- Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- Em uma base degenerada, temos $x_{\mathcal{B}_i} = 0$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, m$;
- Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;

Degeneração

- Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- Em uma base degenerada, temos $x_{\mathcal{B}_i} = 0$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, m$;
- Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;
- Podemos ter $s_j = 0$ mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;

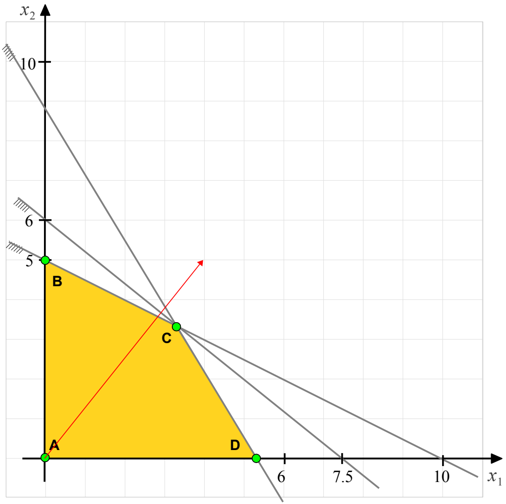
Degeneração: Exemplo 1

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 2{,}67 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



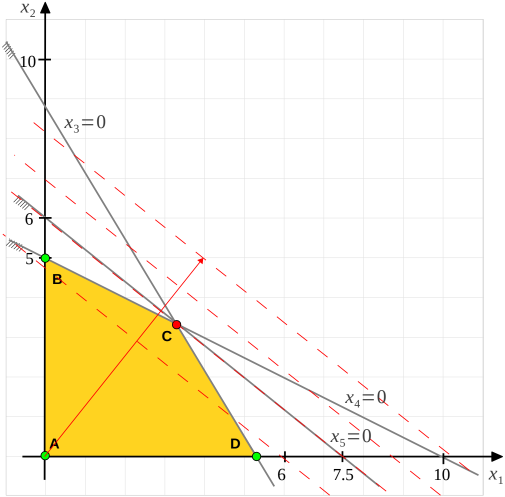
Degeneração: Exemplo 1

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 2{,}67 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
 & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Degeneração: Exemplo 1

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 2{,}67 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Degeneração: Exemplo 1

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2{,}67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2{,}67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \end{aligned}$$

- x_2 entra na base.
- Teste da razão:

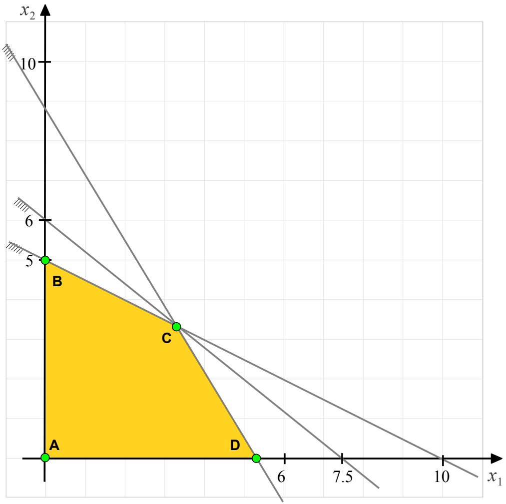
$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} \right\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = 5$$

- x_4 sai da base.

Degeneração: Exemplo 1

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 2{,}67 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Degeneração: Exemplo 1

Iteração 2: $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}167 \\ 5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -1{,}5 \\ s_4 &= c_2 - p^T a_4 = 25 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2{,}67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- x_1 entra na base.
- Teste da razão:

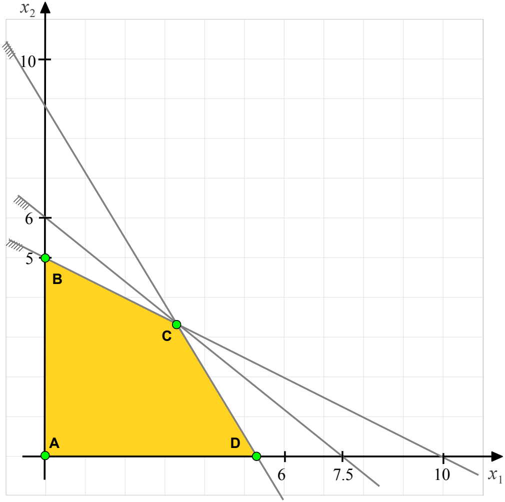
$$y = B^{-1}a_1 \approx \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}5 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} \approx 3{,}33$$

- x_5 sai da base.

Degeneração: Exemplo 1

$$\begin{array}{rl} \text{max} & f(x_1,x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 2{,}67 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Degeneração: Exemplo 1

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1 & 4{,}33 & -2{,}33 \\ 0 & 13{,}3 & -3{,}33 \\ 0 & -16{,}7 & 6{,}67 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}33 \\ 3{,}33 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_5 &= c_5 - p^T a_5 &= 10 \\ s_4 &= c_2 - p^T a_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2{,}67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- PARE: solução ótima encontrada!
- Poderíamos colocar x_4 na base, sem alterar o valor ótimo.
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 \approx \begin{bmatrix} 4{,}33 \\ 13{,}33 \\ -16{,}67 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} \right\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = 0$$

- x_3 sai da base.

Degeneração: Exemplo 1

Para $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0{,}23 & 1 & -0{,}54 \\ -3{,}07 & 0 & 3{,}84 \\ 3{,}84 & 0 & -2{,}30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}33 \\ 3{,}33 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 10 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2{,}67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Apesar de termos uma base diferente, a solução é a **mesma** de antes.

Degeneração: Exemplo 1

Para $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0{,}23 & 1 & -0{,}54 \\ -3{,}07 & 0 & 3{,}84 \\ 3{,}84 & 0 & -2{,}30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}33 \\ 3{,}33 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 10 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2{,}67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Apesar de termos uma base diferente, a solução é a **mesma** de antes.
- $x^\star = (3{,}33,\ 3{,}33,\ 0,\ 0,\ 0)$

Degeneração: Exemplo 1

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2{,}67 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0{,}23 & 1 & -0{,}54 \\ -3{,}07 & 0 & 3{,}84 \\ 3{,}84 & 0 & -2{,}30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 3{,}33 \\ 3{,}33 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

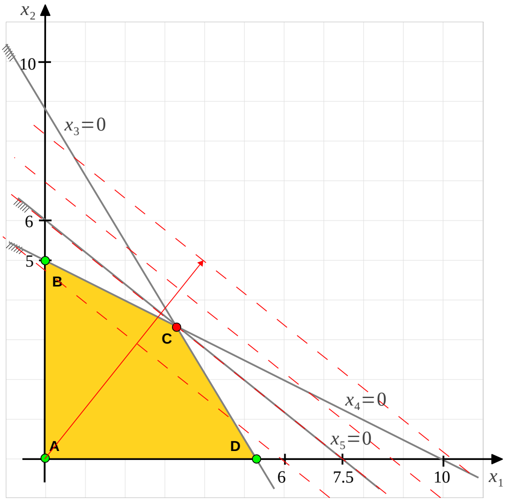
$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 10 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0 \end{aligned}$$

- Apesar de termos uma base diferente, a solução é a **mesma** de antes.
- $x^\star = (3{,}33,\ 3{,}33,\ 0,\ 0,\ 0)$
- Portanto, a solução ótima é única!

Degeneração: Exemplo 1

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 2{,}67 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Degeneração

- Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- Em uma base degenerada, temos $x_{\mathcal{B}_i} = 0$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, m$;
- Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;
- Podemos ter $s_j = 0$ mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;

Degeneração

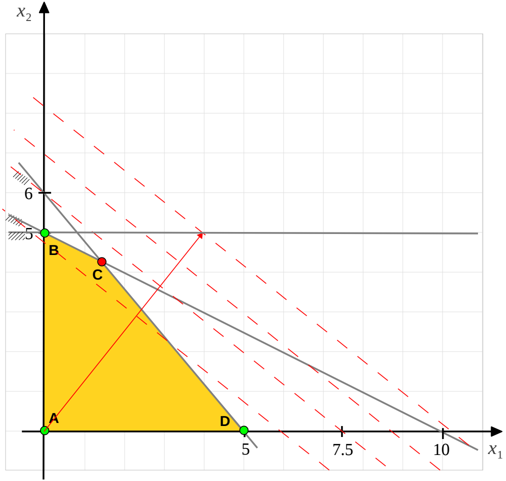
- Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- Em uma base degenerada, temos $x_{\mathcal{B}_i} = 0$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, m$;
- Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;
- Podemos ter $s_j = 0$ mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;
- Degeneração pode aumentar o número de iterações desnecessariamente e causar ciclagem: o método troca de bases mas continua no mesmo ponto extremo, sem convergir;

Degeneração

- Quando um ponto extremo é representado por mais de uma base;
- Em uma base degenerada, temos $x_{\mathcal{B}_i} = 0$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, m$;
- Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada;
- Podemos ter $s_j = 0$ mesmo quando a solução ótima é um único ponto extremo;
- Degeneração pode aumentar o número de iterações desnecessariamente e causar ciclagem: o método troca de bases mas continua no mesmo ponto extremo, sem convergir;
- Na prática, exige regras especiais para evitar ciclagem.

Degeneração: Exemplo 2

$$
\begin{array}{ll}
\max & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a} & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\
& 0x_1 + 1x_2 \leq 5 \\
& 1x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \left[\begin{array}{ccccc} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad b = \left[\begin{array}{c} 30 \\ 5 \\ 10 \end{array}\right]$$

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \left[\begin{array}{c} 30 \\ 5 \\ 10 \end{array}\right]$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \end{aligned}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \end{aligned}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y =$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3,4,5\}$ e $\mathcal{N} = \{1,2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 =$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= -5 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} \right\}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = -5 \end{aligned}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{30}{5}, \frac{5}{1}, \frac{10}{2} \right\}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= -5 \end{aligned}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\{6, 5, 5\}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= -5 \end{aligned}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\{6, 5, 5\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = 5$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 1: $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= -4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= -5 \end{aligned}$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$).
- Teste da razão:

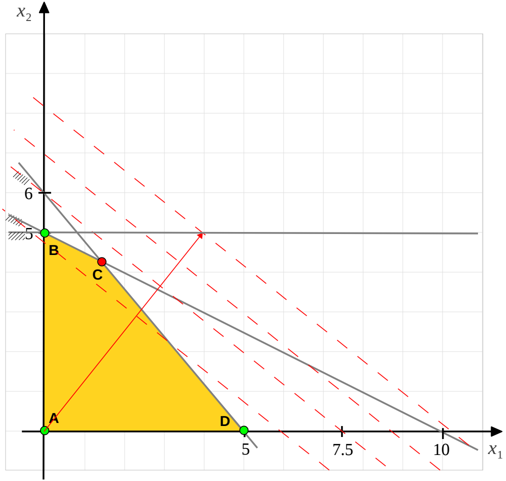
$$y = B^{-1} a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min \{6, 5, 5\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2} = 5$$

- $\bar{x}_{\mathcal{B}_2}$ (x_4) sairá da base.

Degeneração: Exemplo 2

$$\begin{array}{rc} \text{max} & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 0x_1 + 1x_2 \leq 5 \\ & 1x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 2: $\mathcal{B} = \{3, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = -4 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 5 \end{aligned}$$

- x_1 entrará na base ($k = 1$).
- Teste da razão:

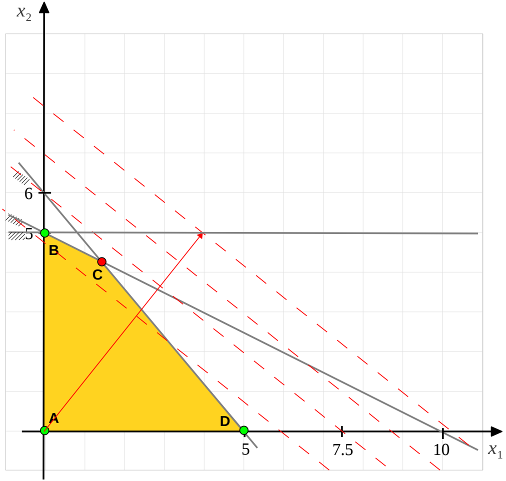
$$y = B^{-1} a_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\{0{,}83;\ \varnothing;\ 0\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_3}}{y_3} = 0$$

- $\bar{x}_{\mathcal{B}_3}$ (x_5) sairá da base.

Degeneração: Exemplo 2

$$\begin{array}{rl} \max & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} & 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 0x_1 + 1x_2 \leq 5 \\ & 1x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} =$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- A solução ainda não é ótima!

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- A solução ainda não é ótima!
- Estamos sobre o mesmo ponto de antes.

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- A solução ainda não é ótima!
- Estamos sobre o mesmo ponto de antes.
- Fizemos uma iteração a mais, trocando de base sem sair do lugar :(

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

- A solução ainda não é ótima!
- Estamos sobre o mesmo ponto de antes.
- Fizemos uma iteração a mais, trocando de base sem sair do lugar :(
- Devemos tomar cuidado para não ciclar! (caso haja novo empate no teste da razão)

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

$$y =$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 =$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{ \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1}, \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_2}}{y_2}, \varnothing \right\}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\left\{\frac{5}{7}, \frac{5}{1}, \varnothing\right\}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\{0{,}71;\ 5;\ \varnothing\}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$s_4 = c_4 - p^T a_4 = -3$$
$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 4$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1}a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\{0{,}71;\ 5;\ \varnothing\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = 0{,}71$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{3, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(degenerada!)}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_4 &= c_4 - p^T a_4 = -3 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 4 \end{aligned}$$

- x_4 entrará na base ($k = 4$).
- Teste da razão:

$$y = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_l}}{y_l} = \min\{0{,}71;\ 5;\ \varnothing\} = \frac{\bar{x}_{\mathcal{B}_1}}{y_1} = 0{,}71$$

- $\bar{x}_{\mathcal{B}_1}$ (x_3) sairá da base.

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$p^T =$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} =$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}429 & 0.000 & -1{,}429 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}429 & 0.000 & -1{,}429 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}429 & 0.000 & -1{,}429 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0{,}429 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 1{,}429 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}429 & 0.000 & -1{,}429 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 &= 0{,}429 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 &= 1{,}429 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- PARE! Os custos relativos são ≥ 0.
- Solução ótima encontrada!

Degeneração: Exemplo 2

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{4, 2, 1\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 3\}$;

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}143 & 1{,}000 & -0{,}857 \\ -0{,}143 & 0{,}000 & 0{,}857 \\ 0{,}286 & 0{,}000 & -0{,}714 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0{,}714 \\ 4{,}286 \\ 1{,}429 \end{bmatrix}$$

- Calcular os custos relativos:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}429 & 0.000 & -1{,}429 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 0{,}429 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 1{,}429 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- PARE! Os custos relativos são ≥ 0.
- Solução ótima encontrada!
- $x^\star = (1{,}43;\ 4{,}29;\ 0,\ 0{,}71;\ 0)$;
- $c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}}^* = -27{,}14$;

Degeneração

▷ Resumindo...

- Um problema de programação linear é degenerado se possui pelo menos uma base degenerada (isto é, $x_{\mathcal{B}_i} = 0$ para pelo menos um $i = 1, \ldots, m$);
- Possíveis consequências:
  - Podemos ter uma única solução ótima mesmo quando $s_j = 0$;
  - O número de iterações pode aumentar desnecessariamente;
  - Pode ocorrer ciclagem: o método repete as trocas de bases, sem convergir para uma solução ótima.
- Existem diversas formas de contornar esses problemas na prática, usando regras que são comumente implementadas nos softwares de otimização.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?