Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 5.1: Método dual simplex

Objetivos deste tópico

- Estudar o método dual simplex e sua inicialização.

Condições KKT

▷ Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
Ax &= b && (1)\\
A^T p + s &= c && (2)\\
s_j x_j &= 0,\ j = 1, \dots, n && (3)\\
x, s &\geq 0 && (4)
\end{aligned}
$$

- A dificuldade está nas folgas complementares (são não-lineares);
- Métodos tipo simplex: particionam as variáveis em dois conjuntos, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ (i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \varnothing$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$). Para garantir (3), impõem $x_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$, e $s_j = 0$, $\forall j \in \mathcal{B}$. Além disso, a partição deve garantir:
  - Método primal simplex: factibilidade primal (busca-se dual);
  - Método dual simplex: factibilidade dual (busca-se primal).

Método dual simplex

Soluções básicas:

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual:

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$,

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$,

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração:

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração: $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração: $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Solução básica primal:

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração: $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1} b$,

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração: $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$, $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$;

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração: $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$, $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$;

O que precisamos definir:

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração: $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$, $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$;

O que precisamos definir:

- Como garantir que uma dada solução básica é ótima?

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração: $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$, $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$;

O que precisamos definir:

- Como garantir que uma dada solução básica é ótima?
- Caso não seja ótima, como melhorá-la?

Método dual simplex

Soluções básicas:

- Solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j, \forall j \in \mathcal{N}$;
- Deve-se garantir que em toda iteração: $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$, $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$;

O que precisamos definir:

- Como garantir que uma dada solução básica é ótima?
- Caso não seja ótima, como melhorá-la?
- O desenvolvimento do método é similar ao feito para o método primal, exceto que agora as trocas de base devem garantir $\bar{s}_{\mathcal{N}} \geq 0$.

Método dual simplex

- Pelas condições KKT, sabemos que para ser ótima, uma solução básica deve satisfazer $x, s \geq 0$

Método dual simplex

- Pelas condições KKT, sabemos que para ser ótima, uma solução básica deve satisfazer $x, s \geq 0$ (todas as demais condições são sempre satisfeitas por uma solução básica);

Método dual simplex

- Pelas condições KKT, sabemos que para ser ótima, uma solução básica deve satisfazer $x, s \geq 0$ (todas as demais condições são sempre satisfeitas por uma solução básica);
- Vamos assumir que $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;

Método dual simplex

- Pelas condições KKT, sabemos que para ser ótima, uma solução básica deve satisfazer $x, s \geq 0$ (todas as demais condições são sempre satisfeitas por uma solução básica);
- Vamos assumir que $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Assim, caso algum componente de $\bar{x}_{\mathcal{B}}$ seja negativo,

Método dual simplex

- Pelas condições KKT, sabemos que para ser ótima, uma solução básica deve satisfazer $x, s \geq 0$ (todas as demais condições são sempre satisfeitas por uma solução básica);
- Vamos assumir que $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Assim, caso algum componente de $\bar{x}_{\mathcal{B}}$ seja negativo, então a solução básica atual não pode ser ótima;

Método dual simplex

- Pelas condições KKT, sabemos que para ser ótima, uma solução básica deve satisfazer $x, s \geq 0$ (todas as demais condições são sempre satisfeitas por uma solução básica);
- Vamos assumir que $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Assim, caso algum componente de $\bar{x}_{\mathcal{B}}$ seja negativo, então a solução básica atual não pode ser ótima;
- Queremos então saber como melhorar tal solução;

Método dual simplex

- Pelas condições KKT, sabemos que para ser ótima, uma solução básica deve satisfazer $x, s \geq 0$ (todas as demais condições são sempre satisfeitas por uma solução básica);
- Vamos assumir que $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Assim, caso algum componente de $\bar{x}_{\mathcal{B}}$ seja negativo, então a solução básica atual não pode ser ótima;
- Queremos então saber como melhorar tal solução;
- Solução geral dual:
  - $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$;
  - $s_j = c_j - p^T a_j, \ \forall j \in \mathcal{N}$;

Método dual simplex

- Pelas condições KKT, sabemos que para ser ótima, uma solução básica deve satisfazer $x, s \geq 0$ (todas as demais condições são sempre satisfeitas por uma solução básica);
- Vamos assumir que $(\bar{s}_{\mathcal{B}}, \bar{s}_{\mathcal{N}}) \geq 0$;
- Assim, caso algum componente de $\bar{x}_{\mathcal{B}}$ seja negativo, então a solução básica atual não pode ser ótima;
- Queremos então saber como melhorar tal solução;
- Solução geral dual:
  - $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$;
  - $s_j = c_j - p^T a_j, \; \forall j \in \mathcal{N}$;
- Vamos analisar o impacto na função objetivo dual.

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$g(p, s) \quad =$$

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$g(p, s) = p^T b$$

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$\begin{aligned} g(p, s) &= p^T b \\ &= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1}) b \end{aligned}$$

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$\begin{aligned} g(p,s) &= p^T b \\ &= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1})b \\ &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \end{aligned}$$

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$\begin{aligned} g(p,s) &= p^T b \\ &= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1}) b \\ &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\ &= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \end{aligned}$$

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$
\begin{aligned}
g(p,s) &= p^T b \\
&= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1}) b \\
&= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\
&= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\
&= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T \bar{x}_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}
$$

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$
\begin{aligned}
g(p,s) &= p^T b \\
&= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1}) b \\
&= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\
&= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\
&= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T \bar{x}_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}
$$

- Assim, $x_{\mathcal{B}_i}$ é o custo relativo da variável dual $s_{\mathcal{B}_i}$;

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$
\begin{aligned}
g(p,s) &= p^T b \\
&= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1})b \\
&= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\
&= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\
&= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T \bar{x}_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}
$$

- Assim, $x_{\mathcal{B}_i}$ é o custo relativo da variável dual $s_{\mathcal{B}_i}$;
- Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_i} < 0$, então podemos melhorar o valor da função objetivo dual perturbando $s_{\mathcal{B}_i}$;

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$\begin{aligned} g(p,s) &= p^T b \\ &= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1})b \\ &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\ &= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\ &= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T \bar{x}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

- Assim, $x_{\mathcal{B}_i}$ é o custo relativo da variável dual $s_{\mathcal{B}_i}$;
- Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_i} < 0$, então podemos melhorar o valor da função objetivo dual perturbando $s_{\mathcal{B}_i}$;
- Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_i} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, a solução primal é factível e, assim, a base atual é

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$\begin{aligned} g(p,s) &= p^T b \\ &= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1})b \\ &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\ &= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\ &= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T \bar{x}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

- Assim, $x_{\mathcal{B}_i}$ é o custo relativo da variável dual $s_{\mathcal{B}_i}$;
- Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_i} < 0$, então podemos melhorar o valor da função objetivo dual perturbando $s_{\mathcal{B}_i}$;
- Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_i} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, a solução primal é factível e, assim, a base atual é ótima.

Método dual simplex

- Expressão geral da função objetivo dual, para uma dada partição $[\mathcal{B}, \mathcal{N}]$:

$$\begin{aligned} g(p,s) &= p^T b \\ &= (c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1}) b \\ &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\ &= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} b \\ &= \bar{p}^T b - s_{\mathcal{B}}^T \bar{x}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

- Assim, $x_{\mathcal{B}_i}$ é o custo relativo da variável dual $s_{\mathcal{B}_i}$;
- Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_i} < 0$, então podemos melhorar o valor da função objetivo dual perturbando $s_{\mathcal{B}_i}$;
- Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_i} \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, m$, a solução primal é factível e, assim, a base atual é ótima. De fato, se qualquer $s_{\mathcal{B}_i}$ se tornar positivo, o valor da função objetivo piora (maximização no dual);

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$$

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - (0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)\, B^{-1} \end{aligned}$$

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - (0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)\, B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1} \end{aligned}$$

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - (0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)\, B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1} \end{aligned}$$

$$s_j = c_j - p^T a_j, \; j \in \mathcal{N}$$

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - (0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)\, B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - p^T a_j, \; j \in \mathcal{N} \\ &= c_j - \left(\bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1} \right) a_j, \; j \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - (0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)\, B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - p^T a_j, \; j \in \mathcal{N} \\ &= c_j - \left(\bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1}\right) a_j, \; j \in \mathcal{N} \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j + \delta e_i^T B^{-1} a_j, \; j \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - (0,\ldots,0,\delta,0,\ldots,0)\, B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - p^T a_j,\ j \in \mathcal{N} \\ &= c_j - \left(\bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1}\right) a_j,\ j \in \mathcal{N} \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j + \delta e_i^T B^{-1} a_j,\ j \in \mathcal{N} \\ &= \bar{s}_j + \delta \eta^T a_j,\ j \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

Método dual simplex

- Perturbar uma única variável $s_{\mathcal{B}_i}$ com o custo relativo negativo;
- Qual a maior perturbação δ possível?
- Pela solução geral:

$$\begin{aligned} p^T &= c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} - s_{\mathcal{B}}^T B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - (0, \ldots, 0, \delta, 0, \ldots, 0)\, B^{-1} \\ &= \bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - p^T a_j,\ j \in \mathcal{N} \\ &= c_j - \left(\bar{p}^T - \delta e_i^T B^{-1}\right) a_j,\ j \in \mathcal{N} \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j + \delta e_i^T B^{-1} a_j,\ j \in \mathcal{N} \\ &= \bar{s}_j + \delta \eta^T a_j,\ j \in \mathcal{N} \end{aligned}$$

(com $\eta^T = e_i^T B^{-1}$)

Método dual simplex

- Logo, para termos $s_j \geq 0$ após a perturbação, devemos garantir que:

Método dual simplex

- Logo, para termos $s_j \geq 0$ após a perturbação, devemos garantir que:

$$s_j = \bar{s}_j + \delta \eta^T a_j \geq 0, \; j \in \mathcal{N}$$

Método dual simplex

- Logo, para termos $s_j \geq 0$ após a perturbação, devemos garantir que:

$$s_j = \bar{s}_j + \delta \eta^T a_j \geq 0, \;\; j \in \mathcal{N}$$

- Observe que para todo $j \in \mathcal{N}$ tal que $\eta^T a_j \geq 0$, δ pode ser tão grande quanto se queira sem violar $s_j \geq 0$;

Método dual simplex

- Logo, para termos $s_j \geq 0$ após a perturbação, devemos garantir que:

$$s_j = \bar{s}_j + \delta \eta^T a_j \geq 0, \;\; j \in \mathcal{N}$$

- Observe que para todo $j \in \mathcal{N}$ tal que $\eta^T a_j \geq 0$, δ pode ser tão grande quanto se queira sem violar $s_j \geq 0$;
- Por outro lado, para os casos em que $\eta^T a_j < 0$ precisamos garantir:

$$\delta \eta^T a_j \geq -\bar{s}_j, \;\; j \in \mathcal{N}$$

Método dual simplex

- Logo, para termos $s_j \geq 0$ após a perturbação, devemos garantir que:

$$s_j = \bar{s}_j + \delta\eta^T a_j \geq 0, \ \ j \in \mathcal{N}$$

- Observe que para todo $j \in \mathcal{N}$ tal que $\eta^T a_j \geq 0$, δ pode ser tão grande quanto se queira sem violar $s_j \geq 0$;
- Por outro lado, para os casos em que $\eta^T a_j < 0$ precisamos garantir:

$$\delta\eta^T a_j \geq -\bar{s}_j, \ \ j \in \mathcal{N}$$

$$-\delta\eta^T a_j \leq \bar{s}_j, \ \ j \in \mathcal{N}$$

Método dual simplex

- Logo, para termos $s_j \geq 0$ após a perturbação, devemos garantir que:

$$s_j = \bar{s}_j + \delta \eta^T a_j \geq 0, \ j \in \mathcal{N}$$

- Observe que para todo $j \in \mathcal{N}$ tal que $\eta^T a_j \geq 0$, δ pode ser tão grande quanto se queira sem violar $s_j \geq 0$;
- Por outro lado, para os casos em que $\eta^T a_j < 0$ precisamos garantir:

$$\delta \eta^T a_j \geq -\bar{s}_j, \ j \in \mathcal{N}$$

$$-\delta \eta^T a_j \leq \bar{s}_j, \ j \in \mathcal{N}$$

$$\Rightarrow \delta \leq \frac{\bar{s}_j}{-\eta^T a_j}, \ j \in \mathcal{N}$$

Método dual simplex

- Logo, para termos $s_j \geq 0$ após a perturbação, devemos garantir que:

$$s_j = \bar{s}_j + \delta\eta^T a_j \geq 0, \ \ j \in \mathcal{N}$$

- Observe que para todo $j \in \mathcal{N}$ tal que $\eta^T a_j \geq 0$, δ pode ser tão grande quanto se queira sem violar $s_j \geq 0$;
- Por outro lado, para os casos em que $\eta^T a_j < 0$ precisamos garantir:

$$\delta\eta^T a_j \geq -\bar{s}_j, \ \ j \in \mathcal{N}$$

$$-\delta\eta^T a_j \leq \bar{s}_j, \ \ j \in \mathcal{N}$$

$$\Rightarrow \delta \leq \frac{\bar{s}_j}{-\eta^T a_j}, \ \ j \in \mathcal{N}$$

- Temos, assim, o teste da razão dual:

Método dual simplex

- Logo, para termos $s_j \geq 0$ após a perturbação, devemos garantir que:

$$s_j = \bar{s}_j + \delta \eta^T a_j \geq 0, \;\; j \in \mathcal{N}$$

- Observe que para todo $j \in \mathcal{N}$ tal que $\eta^T a_j \geq 0$, δ pode ser tão grande quanto se queira sem violar $s_j \geq 0$;
- Por outro lado, para os casos em que $\eta^T a_j < 0$ precisamos garantir:

$$\delta \eta^T a_j \geq -\bar{s}_j, \;\; j \in \mathcal{N}$$

$$-\delta \eta^T a_j \leq \bar{s}_j, \;\; j \in \mathcal{N}$$

$$\Rightarrow \delta \leq \frac{\bar{s}_j}{-\eta^T a_j}, \;\; j \in \mathcal{N}$$

- Temos, assim, o teste da razão dual: $\min\limits_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{\bar{s}_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\}$

Método dual simplex: Algoritmo

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada:

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal:

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$,

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão,

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual:

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Passo 5: Calcular $\eta^T = e_l B^{-1}$;

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Passo 5: Calcular $\eta^T = e_l B^{-1}$;

Passo 6: Se $\eta^T a_j \geq 0$ $\forall j \in \mathcal{N}$,

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Passo 5: Calcular $\eta^T = e_l B^{-1}$;

Passo 6: Se $\eta^T a_j \geq 0 \ \forall j \in \mathcal{N}$, então PARE! Problema

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Passo 5: Calcular $\eta^T = e_l B^{-1}$;

Passo 6: Se $\eta^T a_j \geq 0 \ \forall j \in \mathcal{N}$, então PARE! Problema infactível;

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Passo 5: Calcular $\eta^T = e_l B^{-1}$;

Passo 6: Se $\eta^T a_j \geq 0 \ \forall j \in \mathcal{N}$, então PARE! Problema infactível;

Passo 7: Teste da razão: $\dfrac{\bar{s}_k}{-\eta^T a_k} = \min\limits_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \dfrac{\bar{s}_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\}$;

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Passo 5: Calcular $\eta^T = e_l B^{-1}$;

Passo 6: Se $\eta^T a_j \geq 0 \; \forall j \in \mathcal{N}$, então PARE! Problema infactível;

Passo 7: Teste da razão: $\dfrac{\bar{s}_k}{-\eta^T a_k} = \min\limits_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \dfrac{\bar{s}_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\}$;
$\bar{s}_k$ irá entrar na base.

Método dual simplex: Algoritmo

Entrada: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ é invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Passo 1: Calcular a solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Passo 2: Determinar $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_{\mathcal{B}_i}$;

Passo 3: Se $\bar{x}_{\mathcal{B}_l} \geq 0$, então PARE! Solução ótima encontrada;
Senão, $\bar{x}_{\mathcal{B}_l}$ irá sair na base;

Passo 4: Calcular a solução básica dual: $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Passo 5: Calcular $\eta^T = e_l B^{-1}$;

Passo 6: Se $\eta^T a_j \geq 0 \ \forall j \in \mathcal{N}$, então PARE! Problema infactível;

Passo 7: Teste da razão: $\dfrac{\bar{s}_k}{-\eta^T a_k} = \min\limits_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \dfrac{\bar{s}_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\}$;
$\bar{s}_k$ irá entrar na base.

Passo 8: Atualizar $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ e voltar para o Passo 1.

Método dual simplex

▷ Exercício

Considere o problema de programação linear:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 3x_1 + 1x_2 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 + 5x_2 \geq 11 \\
& 3x_1 + 2x_2 \geq 9 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Resolva usando o método *primal* simplex;

(b) Resolva usando o método *dual* simplex.

Método dual simplex

▷ Exercício: (a) Pelo método *primal* simplex...

Forma padrão:

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{min} & 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 & & \\
\text{s.a} & -2x_1 + 5x_2 - 1x_3 & = & 11 \\
 & 3x_1 + 2x_2 - 1x_4 & = & 9 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (a) Pelo método *primal* simplex...

Forma padrão:

$$\begin{array}{lrl} \text{min} & 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \\ \text{s.a} & -2x_1 + 5x_2 - 1x_3 \qquad\qquad & = 11 \\ & 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - 1x_4 & = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. & \end{array}$$

Método M-grande

(Iniciamos com x_5 e x_6 na base)

$$\begin{array}{lrl} \text{min} & 3x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6 & \\ \text{s.a} & -2x_1 + 5x_2 - 1x_3 \qquad +1x_5 \qquad & = 11 \\ & 3x_1 + 2x_2 \qquad - 1x_4 + \qquad +1x_6 & = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. & \end{array}$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = \end{aligned}$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= 3 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= 1 \end{aligned}$$

- A solução é *dual* factível :)

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = 3$$
$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = 1$$

- A solução é *dual* factível :)

- Podemos usar o método dual simplex!

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= 3 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= 1 \end{aligned}$$

- A solução é *dual* factível :)

- Podemos usar o método dual simplex!

- $x_{\mathcal{B}_1} = x_3$ sairá da base ($l = 1$);

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= 3 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= 1 \end{aligned}$$

- A solução é *dual* factível :)

- Podemos usar o método dual simplex!
- $x_{\mathcal{B}_1} = x_3$ sairá da base ($l = 1$);
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_1 B^{-1} = [-1,\ 0]$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= 3 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= 1 \end{aligned}$$

- A solução é *dual* factível :)
- Podemos usar o método dual simplex!
- $x_{\mathcal{B}_1} = x_3$ sairá da base ($l = 1$);
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_1 B^{-1} = [-1,\ 0]$$

$$\eta^T a_1 = 2;\ \eta^T a_2 = -5$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = 3$$
$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = 1$$

- A solução é *dual* factível :)

- Podemos usar o método dual simplex!
- $x_{\mathcal{B}_1} = x_3$ sairá da base ($l = 1$);
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_1 B^{-1} = [-1,\ 0]$$

$$\eta^T a_1 = 2;\ \eta^T a_2 = -5$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\}$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = 3$$
$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = 1$$

- A solução é *dual* factível :)

- Podemos usar o método dual simplex!
- $x_{\mathcal{B}_1} = x_3$ sairá da base ($l = 1$);
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_1 B^{-1} = [-1,\ 0]$$

$$\eta^T a_1 = 2;\ \eta^T a_2 = -5$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_2}{-\eta^T a_2}$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 &= 3 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 &= 1 \end{aligned}$$

- A solução é *dual* factível :)

- Podemos usar o método dual simplex!
- $x_{\mathcal{B}_1} = x_3$ sairá da base ($l = 1$);
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_1 B^{-1} = [-1,\ 0]$$

$$\eta^T a_1 = 2;\ \eta^T a_2 = -5$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_2}{-\eta^T a_2} = 0{,}2$$

Método dual simplex

▷ Exercício: (b) Pelo método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{3, 4\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

- A solução é *primal* infactível :(
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = c_1 - p^T a_1 = 3$$
$$s_2 = c_2 - p^T a_2 = 1$$

- A solução é *dual* factível :)

- Podemos usar o método dual simplex!
- $x_{\mathcal{B}_1} = x_3$ sairá da base ($l = 1$);
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_1 B^{-1} = [-1,\ 0]$$

$$\eta^T a_1 = 2;\ \eta^T a_2 = -5$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_2}{-\eta^T a_2} = 0{,}2$$

- x_2 entrará na base ($k = 2$)...

Método dual simplex: Inicialização

Método dual simplex: Inicialização

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Método dual simplex: Inicialização

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x \\
\text{s.a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- Vamos assumir que uma base dual factível não esteja disponível;

Método dual simplex: Inicialização

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base dual factível não esteja disponível;
- Seja então $[\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}}]$ uma partição básica tal que $\tilde{s}_k = c_k - \tilde{p}^T a_k < 0$ para pelo menos um $k \in \tilde{\mathcal{N}}$;

Método dual simplex: Inicialização

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x \\
\text{s.a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- Vamos assumir que uma base dual factível não esteja disponível;
- Seja então $[\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}}]$ uma partição básica tal que $\tilde{s}_k = c_k - \tilde{p}^T a_k < 0$ para pelo menos um $k \in \tilde{\mathcal{N}}$; Como obter uma base dual factível?

Método dual simplex: Inicialização

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base dual factível não esteja disponível;
- Seja então $[\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}}]$ uma partição básica tal que $\tilde{s}_k = c_k - \tilde{p}^T a_k < 0$ para pelo menos um $k \in \tilde{\mathcal{N}}$; Como obter uma base dual factível?
- Observe que agora não estamos preocupados com a factibilidade primal, mas sim factibilidade dual!

Método dual simplex: Inicialização

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base dual factível não esteja disponível;
- Seja então $[\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}}]$ uma partição básica tal que $\tilde{s}_k = c_k - \tilde{p}^T a_k < 0$ para pelo menos um $k \in \tilde{\mathcal{N}}$; Como obter uma base dual factível?
- Observe que agora não estamos preocupados com a factibilidade primal, mas sim factibilidade dual!
- Para que o dual seja factível,

Método dual simplex: Inicialização

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base dual factível não esteja disponível;
- Seja então $[\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}}]$ uma partição básica tal que $\tilde{s}_k = c_k - \tilde{p}^T a_k < 0$ para pelo menos um $k \in \tilde{\mathcal{N}}$; Como obter uma base dual factível?
- Observe que agora não estamos preocupados com a factibilidade primal, mas sim factibilidade dual!
- Para que o dual seja factível, o primal deve ser limitado!

Método dual simplex: Inicialização

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base dual factível não esteja disponível;
- Seja então $[\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}}]$ uma partição básica tal que $\tilde{s}_k = c_k - \tilde{p}^T a_k < 0$ para pelo menos um $k \in \tilde{\mathcal{N}}$; Como obter uma base dual factível?
- Observe que agora não estamos preocupados com a factibilidade primal, mas sim factibilidade dual!
- Para que o dual seja factível, o primal deve ser limitado!
- Assim, adicionamos uma nova restrição: $\sum_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} x_j \leq M$.

Método dual simplex: Inicialização

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Vamos assumir que uma base dual factível não esteja disponível;
- Seja então $[\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{N}}]$ uma partição básica tal que $\tilde{s}_k = c_k - \tilde{p}^T a_k < 0$ para pelo menos um $k \in \tilde{\mathcal{N}}$; Como obter uma base dual factível?
- Observe que agora não estamos preocupados com a factibilidade primal, mas sim factibilidade dual!
- Para que o dual seja factível, o primal deve ser limitado!
- Assim, adicionamos uma nova restrição: $\sum_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} x_j \leq M$.
- Limitando as variáveis não-básicas, limitamos todas as variáveis primais.

Método dual simplex: Inicialização

Assim, resolvemos o problema modificado:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^T x \\
\text{s.a} \quad & Ax = b \\
& \sum_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} x_j \leq M \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Método dual simplex: Inicialização

Assim, resolvemos o problema modificado:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^T x \\
\text{s.a} \quad & Ax = b \\
& \sum_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} x_j + x_{n+1} = M \\
& x, x_{n+1} \geq 0
\end{aligned}
$$

Método dual simplex: Inicialização

Assim, resolvemos o problema modificado:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & \displaystyle\sum_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} x_j + x_{n+1} = M \\ & x, x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

cujo dual é dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & b_1 p_1 + \ldots + b_m p_m + Mq \\ \text{s.a} & A^t p + [0 \;\; I]^t q + s = c \\ & q \leq 0 \\ & s \geq 0 \end{array}$$

Método dual simplex: Inicialização

Assim, resolvemos o problema modificado:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^T x \\
\text{s.a} \quad & Ax = b \\
& \sum_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} x_j + x_{n+1} = M \\
& x, x_{n+1} \geq 0
\end{aligned}
$$

cujo dual é dado por:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & b_1 p_1 + \ldots + b_m p_m + Mq \\
\text{s.a} \quad & B^t p \qquad + s_{\mathcal{B}} = c_{\mathcal{B}} \\
& N^t p + q + s_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}} \\
& q \leq 0 \\
& s \geq 0
\end{aligned}
$$

Método dual simplex: Inicialização

Assim, resolvemos o problema modificado:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & \displaystyle\sum_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} x_j + x_{n+1} = M \\ & x, x_{n+1} \geq 0 \end{array}$$

cujo dual é dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & b_1 p_1 + \ldots + b_m p_m - Mq \\ \text{s.a} & B^t p \qquad + s_{\mathcal{B}} = c_{\mathcal{B}} \\ & N^t p - q + s_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}} \\ & q \geq 0 \\ & s \geq 0 \end{array}$$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m+1$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \dots, p_m, q)$ e $(s_1, \dots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m+1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$s_j = c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1)$$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \end{aligned}$$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m+1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;
- $\mathcal{B} =$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;
- $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;
- $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} \cup \{k\}$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;
- $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} \cup \{k\}$ e $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}}$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;
- $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} \cup \{k\}$ e $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} \setminus \{k\}$

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m+1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;
- $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} \cup \{k\}$ e $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} \setminus \{k\} \cup \{n+1\}$;

Método dual simplex: Inicialização

- A matriz A ganha uma nova linha com coeficiente 1 para as variáveis não-básicas;
- Temos agora $m+1$ restrições e $n+1$ variáveis primais;
- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;
- $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} \cup \{k\}$ e $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} \setminus \{k\} \cup \{n+1\}$;
- Por construção, $\mathcal{B}$ é dual factível e podemos iniciar o dual simplex!

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Resolva pelo método dual simplex:

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = 1x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a} \quad & 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 2 \\ & -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \geq 1 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Colocando na forma padrão...

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 2 \\
& -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - x_6 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_6 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício: Se tentarmos aplicar direto o método dual simplex...

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício: Se tentarmos aplicar direto o método dual simplex...

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício: Se tentarmos aplicar direto o método dual simplex...

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício: Se tentarmos aplicar direto o método dual simplex...

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 0$;

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício: Se tentarmos aplicar direto o método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 0$;

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = \end{aligned}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício: Se tentarmos aplicar direto o método dual simplex...

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 0$;
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 12 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -3 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 4 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- A solução também é *dual* infactível!

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício: Se tentarmos aplicar direto o método dual simplex...

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = 0$;
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 1 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 12 \\ s_3 &= c_3 - p^T a_3 = -3 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 4 \end{aligned}$$

- A solução também é *dual* infactível!
- Precisamos da técnica de inicialização.

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Forma padrão:

$$\begin{array}{rl} \text{min} & 1x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ \text{s.a} & 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 \qquad = 2 \\ & -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \qquad - x_6 = 1 \\ & x_1, \ldots, x_6 \geq 0. \end{array}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Inicialização do método dual simplex usando $\sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \leq M$ (para $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$):

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 1x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\
\text{s.a} \quad & 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 2 \\
& -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 = 1 \\
& 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 = M \\
& x_1, \ldots, x_6, x_7 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Inicialização do método dual simplex usando $\sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \leq M$ (para $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$):

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 1x_1 + 12x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \\
\text{s.a} & 1x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 2 \\
& -1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 = 1 \\
& 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 = M \\
& x_1, \ldots, x_6, x_7 \geq 0.
\end{array}
$$

Dado que s_3 foi o mais negativo para a base trivial do problema na forma padrão, teremos agora a base inicial $\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$, com $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$.

Método dual simplex: Inicialização

▷ Relembrando...

- Variáveis duais $(p_1, \ldots, p_m, q)$ e $(s_1, \ldots, s_{n+1})$;
- $|\mathcal{B}| = m + 1 = |\tilde{\mathcal{B}}| + 1$;
- Observe que, para essa nova base:

$$\begin{aligned} s_j &= c_j - (\bar{p}, \bar{q})^T (a_j, 1) \\ &= c_j - \bar{p}^T a_j - \bar{q} \\ &= \tilde{s}_j - \bar{q}; \end{aligned}$$

- Logo, tomando $\tilde{s}_k = \min_{j \in \tilde{\mathcal{N}}} \{\tilde{s}_j\}$ e fazendo $\bar{q} = \tilde{s}_k$ obtemos $s_k = 0$ e podemos adicionar k à base anterior;
- $\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}} \cup \{k\}$ e $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} \setminus \{k\} \cup \{n+1\}$;
- Por construção, $\mathcal{B}$ é dual factível e podemos iniciar o dual simplex!

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = \end{aligned}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 15 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 7 \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = 3 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- A solução é dual factível!

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 15 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 7 \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = 3 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- A solução é dual factível!
- $x_{\mathcal{B}_2} = x_6$ sairá da base ($l = 2$)

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 15 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 7 \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = 3 \end{aligned}$$

- A solução é dual factível!
- $x_{\mathcal{B}_2} = x_6$ sairá da base $(l = 2)$
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_2 B^{-1} = [0,\ -1,\ -3]$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 15 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 7 \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = 3 \end{aligned}$$

- A solução é dual factível!
- $x_{\mathcal{B}_2} = x_6$ sairá da base ($l = 2$)
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_2 B^{-1} = [0,\ -1,\ -3]$$

$$\eta^T a_1 = -2;\ \eta^T a_2 = -5;$$

$$\eta^T a_4 = -6;\ \eta^T a_7 = -3.$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 15 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 7 \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = 3 \end{aligned}$$

- A solução é dual factível!

- $x_{\mathcal{B}_2} = x_6$ sairá da base ($l = 2$)

- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_2 B^{-1} = [0, \ -1, \ -3]$$

$$\eta^T a_1 = -2; \ \eta^T a_2 = -5;$$

$$\eta^T a_4 = -6; \ \eta^T a_7 = -3.$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 15 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 7 \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = 3 \end{aligned}$$

- A solução é dual factível!
- $x_{\mathcal{B}_2} = x_6$ sairá da base ($l = 2$)
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_2 B^{-1} = [0, \ -1, \ -3]$$

$$\eta^T a_1 = -2; \ \eta^T a_2 = -5;$$

$$\eta^T a_4 = -6; \ \eta^T a_7 = -3.$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_7}{-\eta^T a_7}$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 15 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 7 \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = 3 \end{aligned}$$

- A solução é dual factível!
- $x_{\mathcal{B}_2} = x_6$ sairá da base ($l = 2$)
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_2 B^{-1} = [0,\ -1,\ -3]$$

$$\eta^T a_1 = -2;\ \eta^T a_2 = -5;$$

$$\eta^T a_4 = -6;\ \eta^T a_7 = -3.$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_7}{-\eta^T a_7} = 1$$

Método dual simplex: Inicialização

▷ Exercício

Iteração 1

$\mathcal{B} = \{5, 6, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 7\}$;

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \Rightarrow \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -202 \\ -301 \\ 100 \end{bmatrix}$$

- $f(x) = -300$;
- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 - p^T a_1 = 4 \\ s_2 &= c_2 - p^T a_2 = 15 \\ s_4 &= c_4 - p^T a_4 = 7 \\ s_7 &= c_7 - p^T a_7 = 3 \end{aligned}$$

- A solução é dual factível!
- $x_{\mathcal{B}_2} = x_6$ sairá da base ($l = 2$)
- Teste da razão dual:

$$\eta^T = e_2 B^{-1} = [0,\ -1,\ -3]$$

$$\eta^T a_1 = -2;\ \eta^T a_2 = -5;$$

$$\eta^T a_4 = -6;\ \eta^T a_7 = -3.$$

$$\min_{j \in \mathcal{N}} \left\{ \frac{s_j}{-\eta^T a_j} \mid \eta^T a_j < 0 \right\} = \frac{s_7}{-\eta^T a_7} = 1$$

- x_7 entrará na base ($k = 7$)...

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;
- Índices básicos: $\mathcal{B}$, com $|\mathcal{B}| = m$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;
- Índices básicos: $\mathcal{B}$, com $|\mathcal{B}| = m$;
- Índices não-básicos: $\mathcal{N}$, com $|\mathcal{N}| = n - m$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;
- Índices básicos: $\mathcal{B}$, com $|\mathcal{B}| = m$;
- Índices não-básicos: $\mathcal{N}$, com $|\mathcal{N}| = n - m$;
- $B = A_{\mathcal{B}}$ deve ser invertível;

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;
- Índices básicos: $\mathcal{B}$, com $|\mathcal{B}| = m$;
- Índices não-básicos: $\mathcal{N}$, com $|\mathcal{N}| = n - m$;
- $B = A_{\mathcal{B}}$ deve ser invertível;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$, $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;
- Índices básicos: $\mathcal{B}$, com $|\mathcal{B}| = m$;
- Índices não-básicos: $\mathcal{N}$, com $|\mathcal{N}| = n - m$;
- $B = A_{\mathcal{B}}$ deve ser invertível;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$, $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;
- Solução básica dual: $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$.

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;
- Índices básicos: $\mathcal{B}$, com $|\mathcal{B}| = m$;
- Índices não-básicos: $\mathcal{N}$, com $|\mathcal{N}| = n - m$;
- $B = A_{\mathcal{B}}$ deve ser invertível;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$, $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;
- Solução básica dual: $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$.
- As soluções básicas garantem $Ax = b$ e $A^T p \leq c$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;
- Índices básicos: $\mathcal{B}$, com $|\mathcal{B}| = m$;
- Índices não-básicos: $\mathcal{N}$, com $|\mathcal{N}| = n - m$;
- $B = A_{\mathcal{B}}$ deve ser invertível;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$, $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;
- Solução básica dual: $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$.
- As soluções básicas garantem $Ax = b$ e $A^T p \leq c$;
- Método primal simplex: $\bar{x}_{\mathcal{B}} \geq 0$ em toda iteração, busca $\bar{s}_{\mathcal{N}} \geq 0$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Partições básicas

- Garantem a satisfação das folgas complementares: $x_j s_j = 0$;
- Índices básicos: $\mathcal{B}$, com $|\mathcal{B}| = m$;
- Índices não-básicos: $\mathcal{N}$, com $|\mathcal{N}| = n - m$;
- $B = A_{\mathcal{B}}$ deve ser invertível;
- Solução básica primal: $\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$, $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b$;
- Solução básica dual: $\bar{s}_{\mathcal{B}} = 0$, $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j$, $\forall j \in \mathcal{N}$.
- As soluções básicas garantem $Ax = b$ e $A^T p \leq c$;
- Método primal simplex: $\bar{x}_{\mathcal{B}} \geq 0$ em toda iteração, busca $\bar{s}_{\mathcal{N}} \geq 0$;
- Método dual simplex: $\bar{s}_{\mathcal{N}} \geq 0$ em toda iteração, busca $\bar{x}_{\mathcal{B}} \geq 0$.

Métodos tipo simplex: Resumo

Na prática

Métodos tipo simplex: Resumo

Na prática

- Os métodos mais usados na resolução de problemas de otimização linear;

Métodos tipo simplex: Resumo

Na prática

- Os métodos mais usados na resolução de problemas de otimização linear;
- O método dual é o padrão na maioria dos *softwares* de otimização;

Métodos tipo simplex: Resumo

Na prática

- Os métodos mais usados na resolução de problemas de otimização linear;
- O método dual é o padrão na maioria dos *softwares* de otimização;
  - A base ótima continua dual factível após a adição de novas restrições ou limitantes sobre as variáveis (base dos métodos *branch-and-cut*);
  - O método dual possui uma regra conhecida como *steepest edge* usada nas trocas de base, que reduz consideravelmente o número de iterações.

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $B^{-1}b \geq 0$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $B^{-1}b \geq 0$;
- Método das duas fases;

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $B^{-1}b \geq 0$;
- Método das duas fases;
- Método M-grande.

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $B^{-1}b \geq 0$;
- Método das duas fases;
- Método M-grande.

Inicialização dual

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $B^{-1}b \geq 0$;
- Método das duas fases;
- Método M-grande.

Inicialização dual

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $B^{-1}b \geq 0$;
- Método das duas fases;
- Método M-grande.

Inicialização dual

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $\bar{s}_j \geq 0$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Inicialização primal

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b \geq 0$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $B^{-1}b \geq 0$;
- Método das duas fases;
- Método M-grande.

Inicialização dual

- $[\mathcal{B} \mid \mathcal{N}]$ tal que $B = A_{\mathcal{B}}$ seja invertível e $\bar{s}_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$;
- Base trivial: $\mathcal{B}$ dada por variáveis de folga/excesso tal que $\bar{s}_j \geq 0$;
- Restrição adicional com limitante superior M-grande.

Métodos tipo simplex: Resumo

Critérios de parada

Métodos tipo simplex: Resumo

Critérios de parada

- Solução ótima encontrada: $x_{\mathcal{B}} \geq 0$ e $s_{\mathcal{N}} \geq 0$;

Métodos tipo simplex: Resumo

Critérios de parada

- Solução ótima encontrada: $x_{\mathcal{B}} \geq 0$ e $s_{\mathcal{N}} \geq 0$;
- Solução ilimitada: $y_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$ (primal);

Métodos tipo simplex: Resumo

Critérios de parada

- Solução ótima encontrada: $x_{\mathcal{B}} \geq 0$ e $s_{\mathcal{N}} \geq 0$;
- Solução ilimitada: $y_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$ (primal);
- Problema infactível: $w_i > 0$ ao final da Fase 1 ou do método M-grande.

Métodos tipo simplex: Resumo

Critérios de parada

- Solução ótima encontrada: $x_{\mathcal{B}} \geq 0$ e $s_{\mathcal{N}} \geq 0$;
- Solução ilimitada: $y_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$ (primal);
- Problema infactível: $w_i > 0$ ao final da Fase 1 ou do método M-grande.
- Problema infactível: $\eta^T a_j \geq 0$, $\forall j \in \mathcal{N}$ (dual).

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?