



Universidade Federal de São Carlos  
Departamento de Engenharia de Produção



# Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022  
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 5.2: Introdução à Análise de Sensibilidade

# Objetivos deste tópico

- ▶ Estudar o conceito de Análise de Sensibilidade e ver como aplicá-lo a um problema de programação linear por meio do uso de software.

# Análise de sensibilidade

- ▶ Até o momento vimos, como obter a solução ótima de um problema de programação linear;

# Análise de sensibilidade

- ▶ Até o momento vimos, como obter a solução ótima de um problema de programação linear;
- ▶ Pode ser interessante analisar a solução ótima obtida, de modo a obter informações que podem ser úteis para o tomador de decisão.

# Análise de sensibilidade

- ▶ Até o momento vimos, como obter a solução ótima de um problema de programação linear;
- ▶ Pode ser interessante analisar a solução ótima obtida, de modo a obter informações que podem ser úteis para o tomador de decisão. Por exemplo:
  - ▶ Qual seria o impacto de ser comprar mais uma tonelada de uma dada matéria-prima?

# Análise de sensibilidade

- ▶ Até o momento vimos, como obter a solução ótima de um problema de programação linear;
- ▶ Pode ser interessante analisar a solução ótima obtida, de modo a obter informações que podem ser úteis para o tomador de decisão. Por exemplo:
  - ▶ Qual seria o impacto de ser comprar mais uma tonelada de uma dada matéria-prima?
  - ▶ O que acontece se reduzirmos o preço de um dado item?

# Análise de sensibilidade

- ▶ Até o momento vimos, como obter a solução ótima de um problema de programação linear;
- ▶ Pode ser interessante analisar a solução ótima obtida, de modo a obter informações que podem ser úteis para o tomador de decisão. Por exemplo:
  - ▶ Qual seria o impacto de ser comprar mais uma tonelada de uma dada matéria-prima?
  - ▶ O que acontece se reduzirmos o preço de um dado item?
  - ▶ Qual a viabilidade econômica de um novo produto?

# Análise de sensibilidade

- ▶ Até o momento vimos, como obter a solução ótima de um problema de programação linear;
- ▶ Pode ser interessante analisar a solução ótima obtida, de modo a obter informações que podem ser úteis para o tomador de decisão.  
Por exemplo:
  - ▶ Qual seria o impacto de ser comprar mais uma tonelada de uma dada matéria-prima?
  - ▶ O que acontece se reduzirmos o preço de um dado item?
  - ▶ Qual a viabilidade econômica de um novo produto?
  - ▶ E se eu não tiver certeza sobre meus custos ou quantidades em estoque, como a variação desses dados afeta minha solução?



# Análise de sensibilidade

- ▶ O propósito da análise de sensibilidade é determinar se e como a solução ótima ou o valor ótimo mudam

# Análise de sensibilidade

- ▶ O propósito da análise de sensibilidade é determinar se e como a solução ótima ou o valor ótimo mudam de acordo com modificações relativamente pequenas nos dados de entrada,

# Análise de sensibilidade

- ▶ O propósito da análise de sensibilidade é determinar se e como a solução ótima ou o valor ótimo mudam de acordo com modificações relativamente pequenas nos dados de entrada, **sem resolver o problema novamente**;

# Análise de sensibilidade

- ▶ O propósito da análise de sensibilidade é determinar **se e como** a solução ótima ou o valor ótimo mudam de acordo com modificações relativamente pequenas nos dados de entrada, **sem resolver o problema novamente**;
- ▶ Estamos interessados em **tendências**, de acordo com pequenas variações nos parâmetros (dados de entrada);

# Análise de sensibilidade

- ▶ O propósito da análise de sensibilidade é determinar **se e como** a solução ótima ou o valor ótimo mudam de acordo com modificações relativamente pequenas nos dados de entrada, **sem resolver o problema novamente**;
- ▶ Estamos interessados em **tendências**, de acordo com pequenas variações nos parâmetros (dados de entrada);
- ▶ Em alguns casos, indica o quanto podemos confiar na solução, caso os dados sejam incertos;

# Análise de sensibilidade

- ▶ O propósito da análise de sensibilidade é determinar se e como a solução ótima ou o valor ótimo mudam de acordo com modificações relativamente pequenas nos dados de entrada, **sem resolver o problema novamente**;
- ▶ Estamos interessados em **tendências**, de acordo com pequenas variações nos parâmetros (dados de entrada);
- ▶ Em alguns casos, indica o quanto podemos confiar na solução, caso os dados sejam incertos;
- ▶ Também, evita resolver o problema novamente, poupando tempo (computacional e humano) principalmente em problemas complexos e de grande porte.

# Análise de sensibilidade

## ▷ Exemplo

Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga metálica, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo-se as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço venda	3 mil	2 mil	(R\$ por ton)

# Análise de sensibilidade

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



## Após resolver o problema pelo Solver/Excel:

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the Solver Results dialog box open. The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2			Produto 1	Produto 2												
3																
4		Variáveis	x1	x2												
5		Resultado	4,61538462	2,30769231												
6																
7		Custos	3	2												
8																
9		Cobre	0,5	0,3	3	<=	3									
10		Zinco	0,1	0,2	0,923077	<=	1									
11		Chumbo	0,4	0,5	3	<=	3									
12																
13		Valor ótimo	18,4615385													
14																
15																
16																
17																
18																
19																
20																
21																
22																

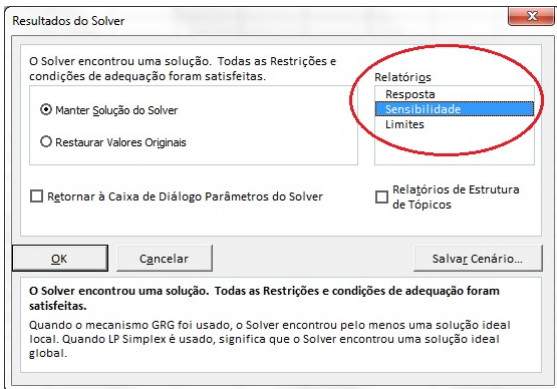
The Solver Results dialog box is open, showing the following options:

- Manter Solução do Solver
- Restaurar Valores Originais
- Retornar à Caixa de Diálogo Parâmetros do Solver
- Relatórios de Estrutura de Tópicos

Buttons: OK, Cancelar, Salvar Cenário...

Text in dialog box: "O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas."

## Selecionamos o Relatório de Sensibilidade:



## O Excel cria automaticamente a planilha Relatório de Sensibilidade:

The screenshot shows the 'Dados' (Data) tab in Microsoft Excel, displaying a 'Relatório de Sensibilidade' (Sensitivity Report) for a linear programming problem. The report is titled 'Microsoft Excel 15.0 Relatório de Sensibilidade' and is for the workbook 'Aula1Exemplo02.xlsx', Plan1.

**Células Variáveis**

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
\$C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
\$D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2

**Restrições**

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

The bottom of the screenshot shows the Excel interface with the 'Relatório de Sensibilidade 1' sheet selected, and the status bar indicating 'PRONTO' and '100%' zoom.

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (*b*)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E§9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E§10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E§11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ O recurso de cada restrição é dado na coluna Restrição Lateral;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (*b*)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ O recurso de cada restrição é dado na coluna Restrição Lateral;
- ▶ A coluna Final Valor diz o quanto foi usado do recurso pela solução ótima obtida;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ O recurso de cada restrição é dado na coluna **Restrição Lateral**;
- ▶ A coluna **Final Valor** diz o quanto foi usado do recurso pela solução ótima obtida;
- ▶ Assim, vemos que Cobre e Chumbo foram usados na totalidade, enquanto houve sobra de Zinco.

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E§9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E§10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E§11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ O preço-sombra de cada restrição é dado na coluna Sombra Preço;



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ O preço-sombra de cada restrição é dado na coluna Sombra Preço;
- ▶ Assim, para cada tonelada adicional de Cobre, o valor ótimo aumentaria em 5,38 (ou seja, 5,38/ton);

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ O preço-sombra de cada restrição é dado na coluna **Sombra Preço**;
- ▶ Assim, para cada tonelada adicional de Cobre, o valor ótimo aumentaria em 5,38 (ou seja, 5,38/ton);
- ▶ Se diminuíssemos o estoque de Cobre em uma tonelada, o valor ótimo diminuiria em 5,38;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E§9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E§10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E§11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ A mesma ideia se aplica às demais restrições;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ A mesma ideia se aplica às demais restrições;
- ▶ Observe que o valor ótimo não se alteraria se aumentássemos/diminuíssemos o estoque de Zinco;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E§9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E§10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E§11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ A mesma ideia se aplica às demais restrições;
- ▶ Observe que o valor ótimo não se alteraria se aumentássemos/diminuíssemos o estoque de Zinco;
- ▶ O valor ótimo subiria 0,76 para cada tonelada adicional de Chumbo;

# Resolvendo pelo método simplex...

## ▷ Iteração ótima

Iteração 3:  $B = \{1, 4, 2\}$  e  $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ ;

$$B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 1 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,30 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix}$$

- ▶ Calcular a solução básica primal:

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix}$$

- ▶ Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_B^T B^{-1} = [-5,36 \quad 0 \quad -0,78]$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 5,36$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 0,78$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- ▶ É possível melhorar essa solução?
- ▶ **Não!** Os custos relativos são  $\geq 0$ .
- ▶ Portanto: solução ótima encontrada!
- ▶  $x^* = (4,62, 2,3, 0, 0,08, 0)$ ;
- ▶  $f(x^*) = c_B^T x_B = -18,46$ ;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ **Entretanto**, as análises com preço-sombra são válidas **SOMENTE** dentro das variações indicadas nas colunas Permitido Aumentar e Permitido Reduzir

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

Restrições							
			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	§E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	§E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	§E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ **Entretanto**, as análises com preço-sombra são válidas **SOMENTE** dentro das variações indicadas nas colunas Permitido Aumentar e Permitido Reduzir
- ▶ Por exemplo, a variação de 5,38/ton no valor ótimo é garantida apenas se o estoque de Cobre variar entre 2,67 e 3,75;



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

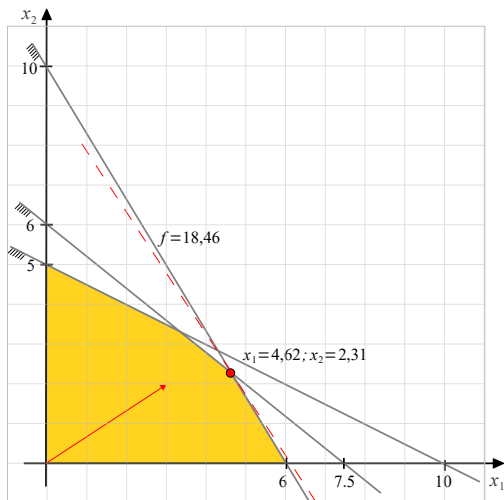
11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ **Entretanto**, as análises com preço-sombra são válidas **SOMENTE** dentro das variações indicadas nas colunas Permitido Aumentar e Permitido Reduzir
- ▶ Por exemplo, a variação de 5,38/ton no valor ótimo é garantida apenas se o estoque de Cobre variar entre 2,67 e 3,75;
- ▶ Além disso, vamos considerar a variação de **apenas um parâmetro por vez!**

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

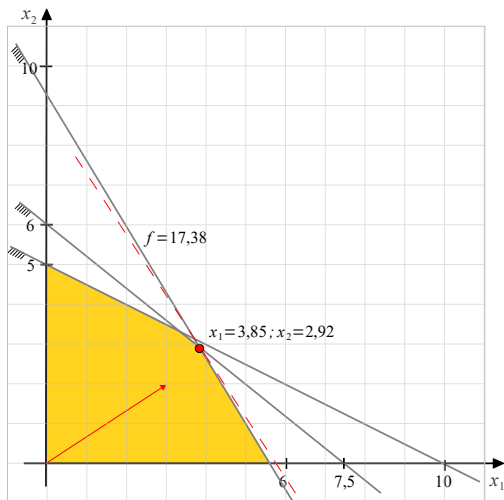
$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,8 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

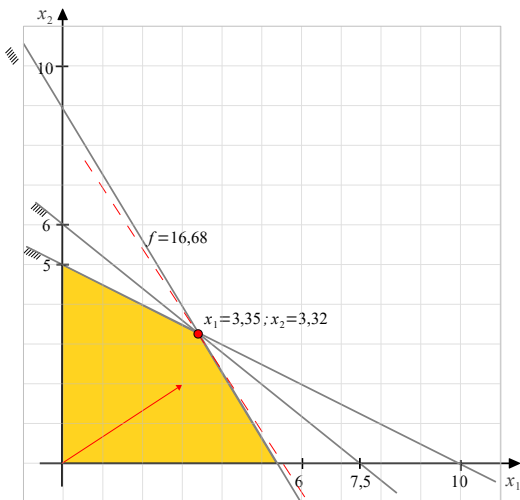
$$\max f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a } 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,67$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

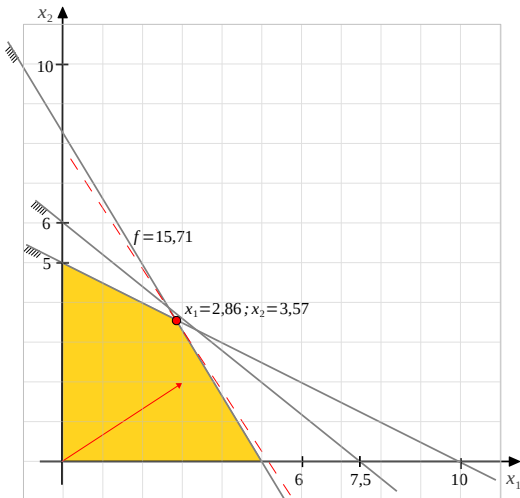
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

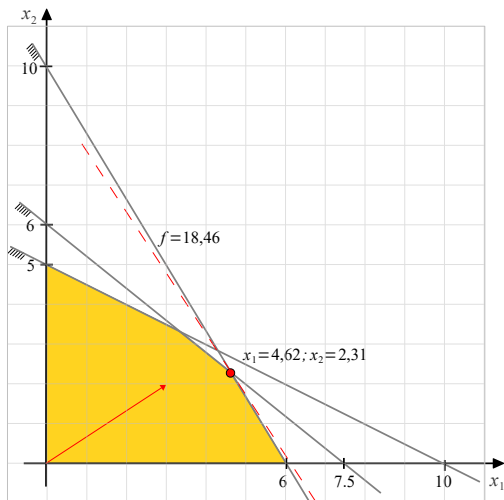
$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 2,5 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

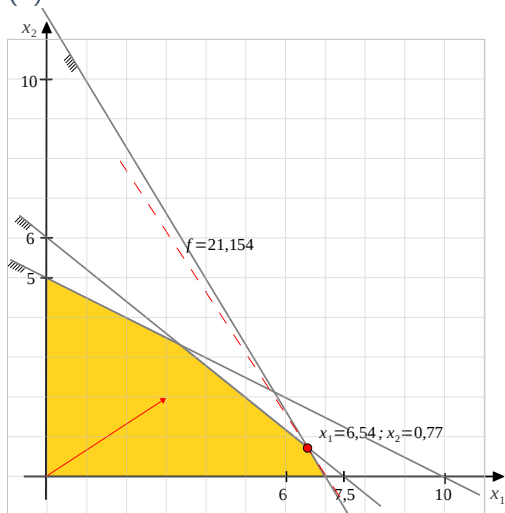
$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

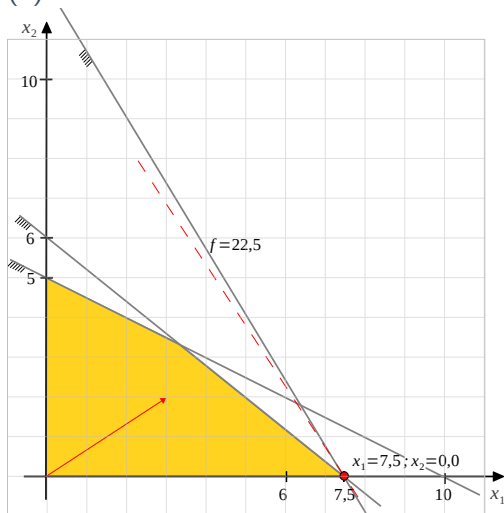
$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3,5 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos ( $b$ )

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3,75 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$





# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Algumas perguntas:

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ Quanto foi usado de Cobre, Zinco e Chumbo?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Algumas perguntas:

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ Quanto foi usado de Cobre, Zinco e Chumbo?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Cobre subisse para 3,75 ton?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Algumas perguntas:

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ Quanto foi usado de Cobre, Zinco e Chumbo?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Cobre subisse para 3,75 ton?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Zinco subisse para 3 ton?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Algumas perguntas:

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ Quanto foi usado de Cobre, Zinco e Chumbo?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Cobre subisse para 3,75 ton?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Zinco subisse para 3 ton?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Chumbo subisse para 4 ton?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Algumas perguntas:

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ R: 3 ton, 0,92 ton e 3 ton, respectivamente;
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Cobre subisse para 3,75 ton?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Zinco subisse para 3 ton?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Chumbo subisse para 4 ton?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Algumas perguntas:

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ R: 3 ton, 0,92 ton e 3 ton, respectivamente;
- ▶ R: O valor ótimo seria 22,5;  $(18,46 + 0,75 * 5,384615 \approx 22,5)$
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Zinco subisse para 3 ton?
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Chumbo subisse para 4 ton?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Algumas perguntas:

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ R: 3 ton, 0,92 ton e 3 ton, respectivamente;
- ▶ R: O valor ótimo seria 22,5; ( $18,46 + 0,75 * 5,384615 \approx 22,5$ )
- ▶ R: Se manteria o mesmo, 18,46 (Permitido aumentar =  $\infty$ )
- ▶ Qual o valor ótimo se o estoque de Chumbo subisse para 4 ton?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificação nos recursos (b)

Algumas perguntas:

11	Restrições						
12			Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
13	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir
14	\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
15	\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
16	\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- ▶ R: 3 ton, 0,92 ton e 3 ton, respectivamente;
- ▶ R: O valor ótimo seria 22,5; ( $18,46 + 0,75 * 5,384615 \approx 22,5$ )
- ▶ R: Se manteria o mesmo, 18,46 (Permitido aumentar =  $\infty$ )
- ▶ R: Nada podemos afirmar usando Análise de Sensibilidade (Permitido aumentar = 0,1428)



# Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

Vamos analisar agora a primeira tabela do relatório de sensibilidade:

Microsoft Excel 15.0 Relatório de Sensibilidade

Planilha: [Aula1Exemplo02.xlsx]Plan1

Células Variáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
\$C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
\$D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
\$E\$9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
\$E\$10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
\$E\$11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

Relatório de Sensibilidade 1

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

Células Variáveis							
		Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido	
	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir
8	\$C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
9	\$D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2

- ▶ Para cada variável, temos a solução ótima dada na coluna Final Valor;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

5	Células Variáveis						
6			Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido
7	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir
8	§C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
9	§D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2
10							

- ▶ Para cada variável, temos a solução ótima dada na coluna Final Valor;
- ▶ A coluna Reduzido Custo dá o custo relativo (factibilidade dual) de cada variável na iteração ótima;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

5 Células Variáveis							
6		Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido	
7	Célula	Nome	Valor	Custo	Coeficiente	Aumentar	Reduzir
8	§C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
9	§D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2
10							

- ▶ Para cada variável, temos a solução ótima dada na coluna Final Valor;
- ▶ A coluna Reduzido Custo dá o custo relativo (factibilidade dual) de cada variável na iteração ótima;
- ▶ Neste problema,  $x_1$  e  $x_2$  estão na base ótima e, portanto, possuem custo relativo igual a zero (folgas complementares).

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

Células Variáveis							
			Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido
	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir
8	\$C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
9	\$D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2

- ▶ A coluna **Objetivo Coeficiente** exibe o coeficiente de cada variável na função objetivo;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

Células Variáveis							
			Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido
	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir
8	\$C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
9	\$D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2

- ▶ A coluna **Objetivo Coeficiente** exibe o coeficiente de cada variável na função objetivo;
- ▶ As colunas seguintes indicam quanto é possível aumentar e diminuir esse coeficiente, **sem que a base ótima se altere**;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

Células Variáveis							
			Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido
	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir
8	\$C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
9	\$D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2

- ▶ A coluna **Objetivo Coeficiente** exibe o coeficiente de cada variável na função objetivo;
- ▶ As colunas seguintes indicam quanto é possível aumentar e diminuir esse coeficiente, **sem que a base ótima se altere**;
- ▶ P. ex., o preço da liga 1 pode variar de 1,6 a 3,33 sem que a solução ótima se altere;



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

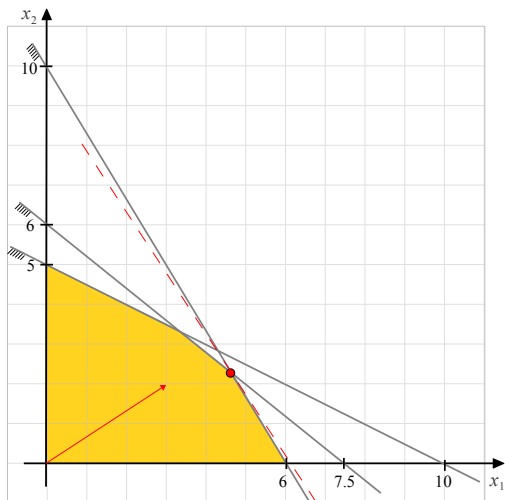
Células Variáveis							
			Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido
	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir
8	\$C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
9	\$D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2

- ▶ A coluna **Objetivo Coeficiente** exibe o coeficiente de cada variável na função objetivo;
- ▶ As colunas seguintes indicam quanto é possível aumentar e diminuir esse coeficiente, **sem que a base ótima se altere**;
- ▶ P. ex., o preço da liga 1 pode variar de 1,6 a 3,33 sem que a solução ótima se altere; Caso seu preço seja alterado para abaixo de 1,6 ou acima de 3,33, pode não ser mais viável produzi-la.

# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

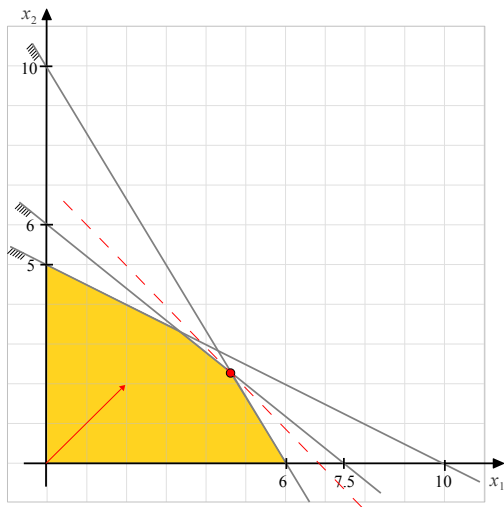
$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

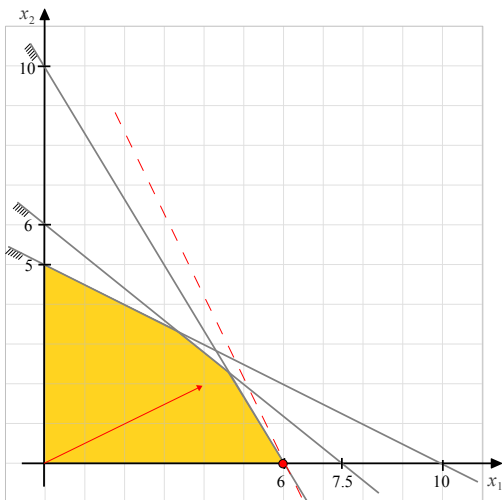
$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
 & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
 & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



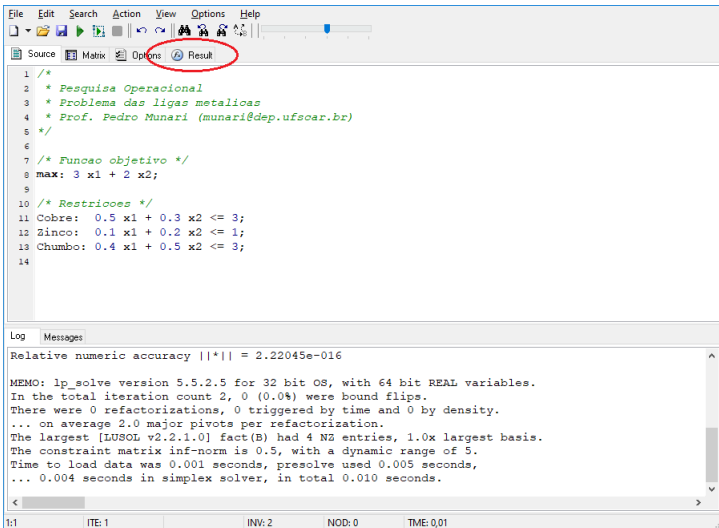
# Análise de sensibilidade

## ▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo ( $c$ )

Células Variáveis							
			Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido
	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir
8	\$C\$5	Resultado x1	4,615384615	0	3	0,333333333	1,4
9	\$D\$5	Resultado x2	2,307692308	0	2	1,75	0,2

- ▶ A coluna **Objetivo Coeficiente** exibe o coeficiente de cada variável na função objetivo;
- ▶ As colunas seguintes indicam quanto é possível aumentar e diminuir esse coeficiente, **sem que a base ótima se altere**;
- ▶ P. ex., o preço da liga 1 pode variar de 1,6 a 3,33 sem que a solução ótima se altere; Caso seu preço seja alterado para abaixo de 1,6 ou acima de 3,33, pode não ser mais viável produzi-la.

O lp\_solve apresenta as mesma informações na aba *Result*:



The screenshot shows the lp\_solve application window. The 'Result' tab is selected and circled in red. The main text area contains the following problem definition:

```

1 /*
2  * Pesquisa Operacional
3  * Problema das ligas metalicas
4  * Prof. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)
5  */
6
7 /* Funcao objetivo */
8 max: 3 x1 + 2 x2;
9
10 /* Restricoes */
11 Cobre: 0.5 x1 + 0.3 x2 <= 3;
12 Zinco: 0.1 x1 + 0.2 x2 <= 1;
13 Chumbo: 0.4 x1 + 0.5 x2 <= 3;
14
    
```

The bottom panel, titled 'Log Messages', displays the following solver output:

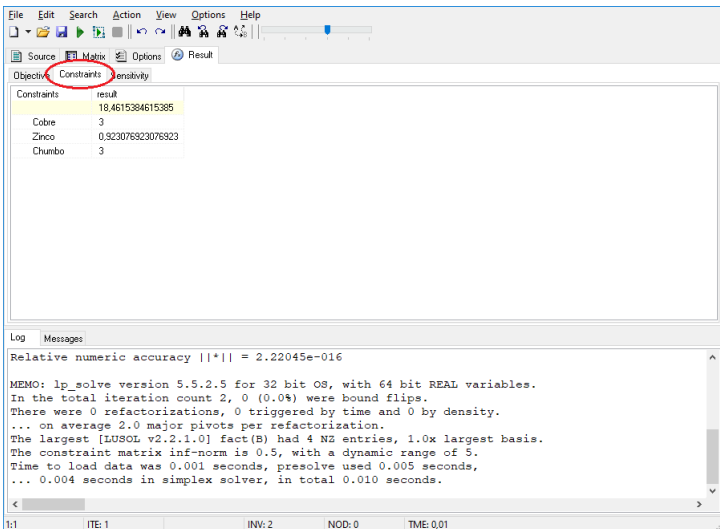
```

Relative numeric accuracy ||*|| = 2.22045e-016

MEMO: lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.
In the total iteration count 2, 0 (0.0%) were bound flips.
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.
... on average 2.0 major pivots per refactorization.
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 4 NZ entries, 1.0x largest basis.
The constraint matrix inf-norm is 0.5, with a dynamic range of 5.
Time to load data was 0.001 seconds, presolve used 0.005 seconds,
... 0.004 seconds in simplex solver, in total 0.010 seconds.
    
```

At the bottom of the window, the status bar shows: 1:1    ITE: 1    INV: 2    NOD: 0    TME: 0,01

Podemos ver o valor do lado esquerdo das restrições na aba *Constraints*:



Constraints	result
	18,4615384615385
Cobre	3
Zinco	0,923076923076923
Chumbo	3

Log Messages

```
Relative numeric accuracy ||*|| = 2.22045e-016  
  
MEMO: lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.  
In the total iteration count 2, 0 (0.0%) were bound flips.  
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.  
... on average 2.0 major pivots per refactorization.  
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 4 NZ entries, 1.0x largest basis.  
The constraint matrix inf-norm is 0.5, with a dynamic range of 5.  
Time to load data was 0.001 seconds, presolve used 0.005 seconds,  
... 0.004 seconds in simplex solver, in total 0.010 seconds.
```

i:1      ITE: 1      INV: 2      NOD: 0      TME: 0,01

A análise de sensibilidade fica na aba *Sensitivity*.

Para mudanças nos coeficientes da função objetivo, temos a aba *Objective*:

The screenshot shows the LUSOL software interface. The 'Sensitivity' tab is selected and circled in red. Below it, the 'Objective' sub-tab is active, displaying a table with the following data:

Variables	from	to	from value	to value
objective	18,46153...	18,461538...	18,461538...	18,4615384...
x1	1,6	3,3333333...	-inf	0
x2	1,8	3,75	-inf	0

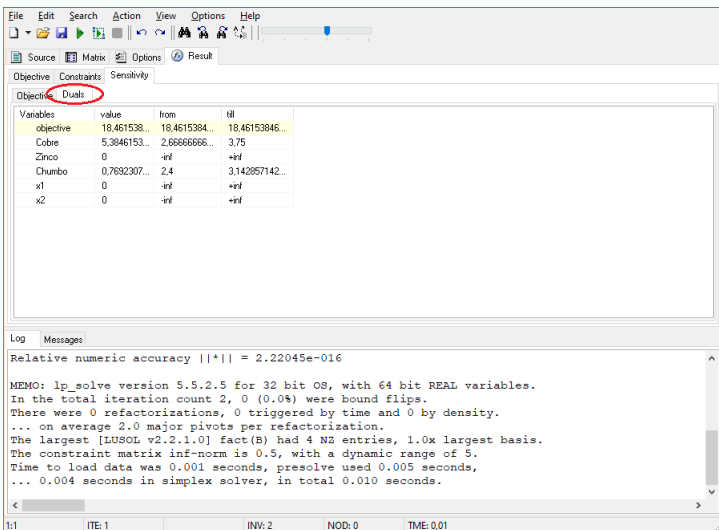
At the bottom, the 'Log' window shows the following text:

```
Relative numeric accuracy ||*|| = 2.22045e-016  
  
MEMO: lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.  
In the total iteration count 2, 0 (0.0%) were bound flips.  
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.  
... on average 2.0 major pivots per refactorization.  
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 4 NZ entries, 1.0x largest basis.  
The constraint matrix inf-norm is 0.5, with a dynamic range of 5.  
Time to load data was 0.001 seconds, presolve used 0.005 seconds,  
... 0.004 seconds in simplex solver, in total 0.010 seconds.
```

The status bar at the bottom indicates: 1:1 | ITE: 1 | INV: 2 | NOD: 0 | TME: 0,01



Para mudanças no vetor de recursos, temos a aba *Duals*:



The screenshot shows the LPSOLVE software interface. The 'Duals' tab is selected and circled in red. The table below shows the dual values for various variables. The 'Log' window at the bottom displays solver statistics.

Variables	value	from	til
objective	18,461538...	18,4615384...	18,46153846...
Cobre	5,3846153...	2,66666666...	3,75
Zinco	0	-inf	+inf
Chumbo	0,7692307...	2,4	3,142857142...
x1	0	-inf	+inf
x2	0	-inf	+inf

Log Messages

```
Relative numeric accuracy ||*|| = 2.22045e-016  
  
MEMO: lp_solve version 5.5.2.5 for 32 bit OS, with 64 bit REAL variables.  
In the total iteration count 2, 0 (0.0%) were bound flips.  
There were 0 refactorizations, 0 triggered by time and 0 by density.  
... on average 2.0 major pivots per refactorization.  
The largest [LUSOL v2.2.1.0] fact(B) had 4 NZ entries, 1.0x largest basis.  
The constraint matrix inf-norm is 0.5, with a dynamic range of 5.  
Time to load data was 0.001 seconds, presolve used 0.005 seconds,  
... 0.004 seconds in simplex solver, in total 0.010 seconds.
```

1:1    ITE: 1    INV: 2    NOD: 0    TME: 0,01

# Análise de sensibilidade

- ▷ Inserção de uma nova variável no problema

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Após obter a solução ótima, pode ser necessário analisar o impacto de adicionarmos uma ou mais variáveis ao problema.

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Após obter a solução ótima, pode ser necessário analisar o impacto de adicionarmos uma ou mais variáveis ao problema. Por exemplo:
  - ▶ Como um novo produto irá impactar na minha produção?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Após obter a solução ótima, pode ser necessário analisar o impacto de adicionarmos uma ou mais variáveis ao problema. Por exemplo:
  - ▶ Como um novo produto irá impactar na minha produção?
  - ▶ Qual deveria ser o preço mínimo para que viabilize sua produção?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Após obter a solução ótima, pode ser necessário analisar o impacto de adicionarmos uma ou mais variáveis ao problema. Por exemplo:
  - ▶ Como um novo produto irá impactar na minha produção?
  - ▶ Qual deveria ser o preço mínimo para que viabilize sua produção?
  - ▶ Há um novo ingrediente no mercado.

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Após obter a solução ótima, pode ser necessário analisar o impacto de adicionarmos uma ou mais variáveis ao problema. Por exemplo:
  - ▶ Como um novo produto irá impactar na minha produção?
  - ▶ Qual deveria ser o preço mínimo para que viabilize sua produção?
  - ▶ Há um novo ingrediente no mercado. Qual o preço máximo desse ingrediente para que compense usá-lo na mistura?

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Após obter a solução ótima, pode ser necessário analisar o impacto de adicionarmos uma ou mais variáveis ao problema. Por exemplo:
  - ▶ Como um novo produto irá impactar na minha produção?
  - ▶ Qual deveria ser o preço mínimo para que viabilize sua produção?
  - ▶ Há um novo ingrediente no mercado. Qual o preço máximo desse ingrediente para que compense usá-lo na mistura?
- ▶ Podemos usar a base ótima do método simplex para tentar responder questões como essas,



# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Após obter a solução ótima, pode ser necessário analisar o impacto de adicionarmos uma ou mais variáveis ao problema. Por exemplo:
  - ▶ Como um novo produto irá impactar na minha produção?
  - ▶ Qual deveria ser o preço mínimo para que viabilize sua produção?
  - ▶ Há um novo ingrediente no mercado. Qual o preço máximo desse ingrediente para que compense usá-lo na mistura?
- ▶ Podemos usar a base ótima do método simplex para tentar responder questões como essas, **sem resolver o problema novamente!**

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Após obter a solução ótima, pode ser necessário analisar o impacto de adicionarmos uma ou mais variáveis ao problema. Por exemplo:
  - ▶ Como um novo produto irá impactar na minha produção?
  - ▶ Qual deveria ser o preço mínimo para que viabilize sua produção?
  - ▶ Há um novo ingrediente no mercado. Qual o preço máximo desse ingrediente para que compense usá-lo na mistura?
- ▶ Podemos usar a base ótima do método simplex para tentar responder questões como essas, **sem resolver o problema novamente!**
- ▶ Para isso, basta considerar que a variável já estava no problema, mas era igual a zero (ou seja, era não-básica).

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Voltando ao problema das ligas metálicas, a empresa estuda a viabilidade de produzir a Liga 3, cuja composição é dada por 30% de Cobre, 30% de Zinco e 40% de Chumbo;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Voltando ao problema das ligas metálicas, a empresa estuda a viabilidade de produzir a Liga 3, cuja composição é dada por 30% de Cobre, 30% de Zinco e 40% de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço dessa nova liga, de modo que compense produzi-la? (ou seja, de modo que ela esteja na base ótima?)

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Voltando ao problema das ligas metálicas, a empresa estuda a viabilidade de produzir a Liga 3, cuja composição é dada por 30% de Cobre, 30% de Zinco e 40% de Chumbo;
- ▶ Qual deve ser o preço dessa nova liga, de modo que compense produzi-la? (ou seja, de modo que ela esteja na base ótima?)
- ▶ Podemos responder usando a base ótima do simplex, se assumirmos que essa liga já estava no problema, mas fora da base; (como se tivéssemos simplesmente esquecido dela!)

# Análise de sensibilidade

▷ Inserção de uma nova variável no problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

# Análise de sensibilidade

▷ Inserção de uma nova variável no problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

## Análise de sensibilidade

▷ Inserção de uma nova variável no problema

$$\begin{array}{llll} \min & -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & & = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 & = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 & & + x_5 = 3 \\ & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

▶ A variável  $x_6$  vai indicar a quantidade produzida da **Liga 3**;



# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

$$\begin{array}{llll} \min & -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\ \text{s.a} & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & & = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 & = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 & & + x_5 = 3 \\ & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

- ▶ A variável  $x_6$  vai indicar a quantidade produzida da **Liga 3**;
- ▶ Essa variável não estava no problema quando resolvemos pelo método simplex, mas podemos pensar que ela estava, só que com valor zero ( $x_6 = 0$ )

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 & = 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 & + x_4 & = 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 & & + x_5 & = 3 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ A variável  $x_6$  vai indicar a quantidade produzida da **Liga 3**;
- ▶ Essa variável não estava no problema quando resolvemos pelo método simplex, mas podemos pensar que ela estava, só que com valor zero ( $x_6 = 0$ ) e, assim, **fora da base!**

# Método simplex

▷ O que mudaria se tivéssemos  $x_6$ ?

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$  e  $\mathcal{N} = \{3, 5\}$ ;

$$B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 1 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,30 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix}$$

▶ Calcular a solução básica primal:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix}$$

▶ Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [-5,36 \quad 0 \quad -0,78]$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 5,36$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 0,78$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- ▶ É possível melhorar essa solução?
- ▶ **Não!** Os custos relativos são  $\geq 0$ .
- ▶ Portanto: solução ótima encontrada!
- ▶  $x^* = (4,62, 2,3, 0, 0,08, 0)$ ;
- ▶  $f(x^*) = c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} = -18,46$ ;

# Método simplex

▷ O que mudaria se tivéssemos  $x_6$ ?

Iteração 3:  $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$  e  $\mathcal{N} = \{3, 5, 6\}$ ;

$$B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 1 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & -2,30 \\ 0,23 & 1 & -0,54 \\ -3,07 & 0 & 3,84 \end{bmatrix}$$

▶ Calcular a solução básica primal:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4,62 \\ 0,08 \\ 2,30 \end{bmatrix}$$

▶ Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [-5,36 \quad 0 \quad -0,78]$$

$$s_3 = c_3 - p^T a_3 = 5,36$$

$$s_5 = c_5 - p^T a_5 = 0,78$$

$$s_6 = c_6 - p^T a_6 = ???$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 & 0,4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- ▶ É possível melhorar essa solução?
- ▶ **Não!** Os custos relativos são  $\geq 0$ .
- ▶ Portanto: solução ótima encontrada!
- ▶  $x^* = (4,62, 2,3, 0, 0,08, 0)$ ;
- ▶  $f(x^*) = c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} = -18,46$ ;

# Análise de sensibilidade

▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!
- ▶ Para isso, devemos determinar qual o valor de  $c_6$  tal que

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!
- ▶ Para isso, devemos determinar qual o valor de  $c_6$  tal que  $s_6 < 0$ :

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!
- ▶ Para isso, devemos determinar qual o valor de  $c_6$  tal que  $s_6 < 0$ :  
 $\Rightarrow c_6 - p^T a_6 < 0$



# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!
- ▶ Para isso, devemos determinar qual o valor de  $c_6$  tal que  $s_6 < 0$ :

$$\Rightarrow c_6 - p^T a_6 < 0$$

$$\Rightarrow c_6 - \begin{bmatrix} -5,36 & 0 & -0,78 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix} < 0$$

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!
- ▶ Para isso, devemos determinar qual o valor de  $c_6$  tal que  $s_6 < 0$ :

$$\Rightarrow c_6 - p^T a_6 < 0$$

$$\Rightarrow c_6 - \begin{bmatrix} -5,36 & 0 & -0,78 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix} < 0$$

$$\Rightarrow c_6 < -1,92$$

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!
- ▶ Para isso, devemos determinar qual o valor de  $c_6$  tal que  $s_6 < 0$ :

$$\Rightarrow c_6 - p^T a_6 < 0$$

$$\Rightarrow c_6 - \begin{bmatrix} -5,36 & 0 & -0,78 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix} < 0$$

$$\Rightarrow c_6 < -1,92$$

- ▶ Lembrando que o problema foi colocado na **forma padrão**, devemos trocar o sinal para tirar conclusões sobre o problema original;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!
- ▶ Para isso, devemos determinar qual o valor de  $c_6$  tal que  $s_6 < 0$ :

$$\Rightarrow c_6 - p^T a_6 < 0$$

$$\Rightarrow c_6 - \begin{bmatrix} -5,36 & 0 & -0,78 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix} < 0$$

$$\Rightarrow c_6 < -1,92$$

- ▶ Lembrando que o problema foi colocado na **forma padrão**, devemos trocar o sinal para tirar conclusões sobre o problema original;
- ▶ Portanto, o preço da Liga 3 deve ser (estritamente) maior que 1,92 para que ela seja produzida;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

- ▶ Para a Liga 3 ser produzida,  $x_6$  deve entrar na base!
- ▶ Para isso, devemos determinar qual o valor de  $c_6$  tal que  $s_6 < 0$ :

$$\Rightarrow c_6 - p^T a_6 < 0$$

$$\Rightarrow c_6 - \begin{bmatrix} -5,36 & 0 & -0,78 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{bmatrix} < 0$$

$$\Rightarrow c_6 < -1,92$$

- ▶ Lembrando que o problema foi colocado na **forma padrão**, devemos trocar o sinal para tirar conclusões sobre o problema original;
- ▶ Portanto, o preço da Liga 3 deve ser (estritamente) maior que 1,92 para que ela seja produzida;
- ▶ Observe que **não** precisamos resolver o problema novamente para determinar isso!

# Análise de sensibilidade

▷ Inserção de uma nova variável no problema

Para um problema qualquer:

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

Para um problema qualquer:

- ▶ Seja  $x_k$  a nova variável, com custo  $c_k$  e coeficientes  $a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$ .

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

Para um problema qualquer:

- ▶ Seja  $x_k$  a nova variável, com custo  $c_k$  e coeficientes  $a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$ .
- ▶ Como saber se a solução ótima se altera após adicionarmos  $x_k$ ?



# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

Para um problema qualquer:

- ▶ Seja  $x_k$  a nova variável, com custo  $c_k$  e coeficientes  $a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$ .
- ▶ Como saber se a solução ótima se altera após adicionarmos  $x_k$ ?  
R: Analisando o custo relativo  $s_k = c_k - \bar{p}^T a_k$ ;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

Para um problema qualquer:

- ▶ Seja  $x_k$  a nova variável, com custo  $c_k$  e coeficientes  $a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$ .
- ▶ Como saber se a solução ótima se altera após adicionarmos  $x_k$ ?  
R: Analisando o custo relativo  $s_k = c_k - \bar{p}^T a_k$ ;
- ▶ Assim, para termos  $x_k > 0$ , devemos forçar  $s_k < 0$ ;

# Análise de sensibilidade

## ▷ Inserção de uma nova variável no problema

Para um problema qualquer:

- ▶ Seja  $x_k$  a nova variável, com custo  $c_k$  e coeficientes  $a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$ .
- ▶ Como saber se a solução ótima se altera após adicionarmos  $x_k$ ?  
 $R$ : Analisando o custo relativo  $s_k = c_k - \bar{p}^T a_k$ ;
- ▶ Assim, para termos  $x_k > 0$ , devemos forçar  $s_k < 0$ ;
- ▶ Se  $c_k$  for desconhecido, podemos determiná-lo de modo que  $c_k - \bar{p}^T a_k < 0$ .

# Análise de sensibilidade

## ▷ Exercício

Uma fábrica de alimentos deseja produzir um novo sabor de barra de cereais. Os requisitos nutricionais exigem que as barras tenham certas quantidades mínimas e máximas de certos nutrientes principais, sendo: no mínimo 22% de Fibra e 7% de Proteína; e no máximo 55% de Carboidrato e 8% de Gorduras. Para produzir as barras, a fábrica usará como ingredientes: Farinha de Cereais, Mel, Soja e Banana. As proporções de nutrientes em cada ingrediente, bem como os custos por quilograma de cada ingrediente são apresentados na tabela a seguir.

Nutrientes	Ingredientes				Barra
	Cereais	Mel	Soja	Banana	
Fibra	0,26	0,01	0,25	0,10	0,22
Proteína	0,05	0,05	0,26	0,02	0,07
Carboidrato	0,60	0,75	0,45	0,24	0,55
Gorduras	0,07	–	0,01	0,01	0,08
Custos (R\$/kg)	5,20	6,80	7,10	2,50	

A fábrica deseja determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir 1 kg da barra de cereais que satisfaça às restrições nutricionais e tenha custo mínimo.

# Análise de sensibilidade

## ▷ Exercício

- (a) Elabore um modelo de otimização para auxiliar na tomada de decisão da fábrica.
- (b) Escreva o problema dual do modelo elaborado no item (a).
- (c) Resolva o modelo do item (a) por um software de otimização e responda as questões a seguir usando **apenas** o Relatório de Sensibilidade (**justifique**):
  - (i) Qual o valor ótimo e as soluções ótimas do modelo e de seu dual?
  - (ii) O que ocorre com o custo de 1kg da mistura, caso a exigência de Fibra passe para 23%?
  - (iii) Qual o custo de 1kg da mistura caso a exigência de Proteína seja 10%?
  - (iv) Qual o custo de 1kg da mistura caso a exigência de Carboidrato seja 47%?
  - (v) Qual o custo máximo da Soja para que ainda compense utilizá-la na mistura?
  - (vi) O que aconteceria com a solução ótima caso o custo da Farinha de Cerais subisse para R\$7,00? E com o valor ótimo?
  - (vii) Qual deve ser o custo do Mel para que compense usá-lo na mistura? (Dica: use o custo relativo)

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?