Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 5.3: Teoria de Análise de Sensibilidade

Objetivos deste tópico

- Conhecer a teoria envolvida na Análise de Sensibilidade;
- Entender como os softwares obtêm o Relatório de Sensibilidade a partir da iteração ótima do método simplex.

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Para entender como os relatórios de análise de sensibilidade são produzidos pelos softwares, vamos analisar os cálculos feitos em cada caso a seguir:

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Para entender como os relatórios de análise de sensibilidade são produzidos pelos softwares, vamos analisar os cálculos feitos em cada caso a seguir:

- Modificações nos recursos (b);

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Para entender como os relatórios de análise de sensibilidade são produzidos pelos softwares, vamos analisar os cálculos feitos em cada caso a seguir:

- Modificações nos recursos (b);
- Modificações nos coeficientes da função objetivo (c);

Análise de sensibilidade

▷ Como funciona?

Para entender como os relatórios de análise de sensibilidade são produzidos pelos softwares, vamos analisar os cálculos feitos em cada caso a seguir:

- Modificações nos recursos (b);
- Modificações nos coeficientes da função objetivo (c);

Obs.: Vamos sempre assumir que o problema está na forma padrão.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b.

- Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b.

- Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b;
- Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T\bar{x}$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b.

- Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b;
- Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T\bar{x}$;
- Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b.

- Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b;
- Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T\bar{x}$;
- Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

$$F(b) = b^T\bar{p}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b.

- Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b;
- Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T\bar{x}$;
- Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

$$\begin{aligned} F(b) &= b^T\bar{p} \\ &= b_1\bar{p}_1 + b_2\bar{p}_2 + \ldots + b_m\bar{p}_m. \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b.

- Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b;
- Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T\bar{x}$;
- Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

$$\begin{aligned} F(b) &= b^T\bar{p} \\ &= b_1\bar{p}_1 + b_2\bar{p}_2 + \ldots + b_m\bar{p}_m. \end{aligned}$$

- Observando essa última expressão, qual seria a taxa de variação da função objetivo, caso um dado b_i fosse modificado?

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Vamos analisar como o valor ótimo se altera em função de b.

- Vamos denotar por $F(b)$ o valor ótimo do problema, para um dado vetor independente b;
- Se $\bar{x}$ é uma solução básica primal ótima, então: $F(b) = c^T\bar{x}$;
- Por dualidade, se $\bar{p}$ é a solução básica dual ótima, então:

$$\begin{aligned} F(b) &= b^T\bar{p} \\ &= b_1\bar{p}_1 + b_2\bar{p}_2 + \ldots + b_m\bar{p}_m. \end{aligned}$$

- Observando essa última expressão, qual seria a taxa de variação da função objetivo, caso um dado b_i fosse modificado? *R:* $\bar{p}_i$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \ldots, b_i + \delta, \ldots, b_m)^T$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \ldots, b_i + \delta, \ldots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \ldots, b_i + \delta, \ldots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

$$F(b') \quad = \quad b_1\bar{p}_1 + \ldots + (b_i + \delta)\bar{p}_i + \ldots + b_m\bar{p}_m$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \dots, b_i + \delta, \dots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

$$\begin{aligned} F(b') &= b_1\bar{p}_1 + \ldots + (b_i + \delta)\bar{p}_i + \ldots + b_m\bar{p}_m \\ &= b_1\bar{p}_1 + \ldots + b_i\bar{p}_i + \delta\bar{p}_i + \ldots + b_m\bar{p}_m \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \ldots, b_i + \delta, \ldots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

$$\begin{aligned} F(b') &= b_1\bar{p}_1 + \ldots + (b_i + \delta)\bar{p}_i + \ldots + b_m\bar{p}_m \\ &= b_1\bar{p}_1 + \ldots + b_i\bar{p}_i + \delta\bar{p}_i + \ldots + b_m\bar{p}_m \\ &= F(b) + \delta\bar{p}_i. \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Se modificarmos b_i alterando o vetor de recursos para

$$b' = (b_1, \ldots, b_i + \delta, \ldots, b_m)^T$$

sendo δ um valor qualquer, temos que

$$\begin{aligned} F(b') &= b_1\bar{p}_1 + \ldots + (b_i + \delta)\bar{p}_i + \ldots + b_m\bar{p}_m \\ &= b_1\bar{p}_1 + \ldots + b_i\bar{p}_i + \delta\bar{p}_i + \ldots + b_m\bar{p}_m \\ &= F(b) + \delta\bar{p}_i. \end{aligned}$$

- Logo, essa modificação faz com que o valor da função objetivo seja alterado em $\delta\bar{p}_i$, assumindo-se que a base ótima continue a mesma.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?
- O que muda se alterarmos b? ($x_{\mathcal{B}}$? p? s?)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?
- O que muda se alterarmos b? $(x_{\mathcal{B}}?\ p?\ s?)$
- Precisamos garantir que $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$, isto é,

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?
- O que muda se alterarmos b? ($x_{\mathcal{B}}$? p? s?)
- Precisamos garantir que $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$, isto é,

$$x'_{\mathcal{B}} = B^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i + \delta \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \bar{x}_{\mathcal{B}} + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- Como saber se a base ótima de $F(b')$ é a mesma de $F(b)$?
- O que muda se alterarmos b? ($x_{\mathcal{B}}$? p? s?)
- Precisamos garantir que $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$, isto é,

$$x'_{\mathcal{B}} = B^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i + \delta \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \bar{x}_{\mathcal{B}} + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

- Esta análise resulta em valores mínimos e máximos para δ, de modo que a base ótima de $F(b')$ seja a mesma de $F(b)$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b_i' = b_i + \delta$:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b_i' = b_i + \delta$:

- Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b_i' = b_i + \delta$:

- Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;
- Para cada restrição i, p_i dá a taxa de variação da função objetivo em relação a modificar b_i por 1 unidade;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

- Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;
- Para cada restrição i, p_i dá a taxa de variação da função objetivo em relação a modificar b_i por 1 unidade;
- Deve-se garantir que a variação não mude a base ótima: $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

- Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;
- Para cada restrição i, p_i dá a taxa de variação da função objetivo em relação a modificar b_i por 1 unidade;
- Deve-se garantir que a variação não mude a base ótima: $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$.

Exercício:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

Resumindo, ao modificar b_i para $b'_i = b_i + \delta$:

- Usamos a solução ótima dual p para analisar o impacto;
- Para cada restrição i, p_i dá a taxa de variação da função objetivo em relação a modificar b_i por 1 unidade;
- Deve-se garantir que a variação não mude a base ótima: $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$.

Exercício:

- No problema das ligas metálicas, determine o intervalo de variação do estoque de Cobre ($b_1 = 3$) para o qual a análise de sensibilidade é válida.

Problema das ligas metálicas

▷ Iteração ótima do método simplex

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3{,}84 & 0 & -2{,}30 \\ 0{,}23 & 1 & -0{,}54 \\ -3{,}07 & 0 & 3{,}84 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4{,}62 \\ 0{,}08 \\ 2{,}30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -5{,}36 & 0 & -0{,}78 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 &= 5{,}36 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 &= 0{,}78 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- É possível melhorar essa solução?
- Não! Os custos relativos são ≥ 0.
- Portanto: solução ótima encontrada!
- $x^\star = (4{,}62,\ 2{,}3,\ 0,\ 0{,}08,\ 0)$;
- $f(x^\star) = c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} = -18{,}46$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$

$$\Rightarrow x_{\mathcal{B}} + B^{-1}\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$

$$\Rightarrow x_{\mathcal{B}} + B^{-1}\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4{,}62 \\ 0{,}08 \\ 2{,}30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3{,}84 & 0 & -2{,}30 \\ 0{,}23 & 1 & -0{,}54 \\ -3{,}07 & 0 & 3{,}84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $b_1 + \delta$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $x'_{\mathcal{B}} = B^{-1}b' \geq 0$

$$\Rightarrow x_{\mathcal{B}} + B^{-1}\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4{,}62 \\ 0{,}08 \\ 2{,}30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3{,}84 & 0 & -2{,}30 \\ 0{,}23 & 1 & -0{,}54 \\ -3{,}07 & 0 & 3{,}84 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4{,}62 \\ 0{,}08 \\ 2{,}30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3{,}84\delta \\ 0{,}23\delta \\ -3{,}07\delta \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20$;
- $0{,}08 + 0{,}23\delta \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20$;
- $0{,}08 + 0{,}23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}08/0{,}23$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20;$
- $0{,}08 + 0{,}23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}08/0{,}23 \Rightarrow \delta \geq -0{,}35;$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20;$
- $0{,}08 + 0{,}23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}08/0{,}23 \Rightarrow \delta \geq -0{,}35;$
- $2{,}30 - 3{,}07\delta \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20;$
- $0{,}08 + 0{,}23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}08/0{,}23 \Rightarrow \delta \geq -0{,}35;$
- $2{,}30 - 3{,}07\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq -2{,}30/-3{,}07$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20;$
- $0{,}08 + 0{,}23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}08/0{,}23 \Rightarrow \delta \geq -0{,}35;$
- $2{,}30 - 3{,}07\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq -2{,}30/-3{,}07 \Rightarrow \delta \leq 0{,}75$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20;$
- $0{,}08 + 0{,}23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}08/0{,}23 \Rightarrow \delta \geq -0{,}35;$
- $2{,}30 - 3{,}07\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq -2{,}30/-3{,}07 \Rightarrow \delta \leq 0{,}75$
- Fazendo a intersecção dos três intervalos obtidos, concluímos que para δ entre $-0{,}35$ e $0{,}75$ a base atual permanece ótima.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos recursos (b)

- A partir desta última expressão, podemos determinar o intervalo que estamos buscando para δ:
- $4{,}62 + 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -4{,}62/3{,}84 \Rightarrow \delta \geq -1{,}20$;
- $0{,}08 + 0{,}23\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}08/0{,}23 \Rightarrow \delta \geq -0{,}35$;
- $2{,}30 - 3{,}07\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq -2{,}30/-3{,}07 \Rightarrow \delta \leq 0{,}75$
- Fazendo a intersecção dos três intervalos obtidos, concluímos que para δ entre $-0{,}35$ e $0{,}75$ a base atual permanece ótima.
- Obs.: Devido aos arredondamentos feitos no cálculo da inversa e de outras operações, o resultado ficou ligeiramente diferente do obtido pelos softwares.

Análise de sensibilidade

▷ Pelo relatório do Excel...

Vamos analisar a segunda tabela (Restrições)

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
E9	Cobre	3	5,384615385	3	0,75	0,333333333
E10	Zinco	0,923076923	0	1	1E+30	0,076923077
E11	Chumbo	3	0,769230769	3	0,142857143	0,6

- Entretanto, as análises com preço-sombra são válidas SOMENTE dentro das variações indicadas nas colunas Permitido Aumentar e Permitido Reduzir
- Por exemplo, a variação de $5{,}38$/ton no valor ótimo é garantida apenas se o estoque de Cobre variar entre $2{,}67$ e $3{,}75$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

- Queremos analisar o impacto dessa mudança: será que a base ótima continuará ótima após essa modificação?

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

- Queremos analisar o impacto dessa mudança: será que a base ótima continuará ótima após essa modificação?
- O que muda se alterarmos c? ($x_{\mathcal{B}}$? p? s? Valor ótimo?)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

- Queremos analisar o impacto dessa mudança: será que a base ótima continuará ótima após essa modificação?
- O que muda se alterarmos c? ($x_{\mathcal{B}}$? p? s? Valor ótimo?)
- Sendo $\mathcal{B}$ a base ótima e B a matriz básica correspondente, a solução ótima dual é dada por $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, com os custos relativos $s_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $j \in \mathcal{N}$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Vamos supor que o coeficiente c_k da função objetivo seja modificado para $c_k + \delta$.

- Queremos analisar o impacto dessa mudança: será que a base ótima continuará ótima após essa modificação?
- O que muda se alterarmos c? ($x_{\mathcal{B}}$? p? s? Valor ótimo?)
- Sendo $\mathcal{B}$ a base ótima e B a matriz básica correspondente, a solução ótima dual é dada por $\bar{p}^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1}$, com os custos relativos $s_j = c_j - \bar{p}^T a_j \geq 0$, $j \in \mathcal{N}$.
- Se c_k é o custo de uma variável não-básica, então a modificação pode ter impacto em um único custo relativo (Caso 1). Caso contrário, tanto a solução dual quanto todos os custos relativos podem mudar (Caso 2).

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$s'_k = c_k + \delta - \bar{p}^T a_k$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned} s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$
\begin{aligned}
s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\
&= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\
&= s_k + \delta.
\end{aligned}
$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned} s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta. \end{aligned}$$

- $\bar{p}$ e os demais custos relativos não são alterados por δ.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned} s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta. \end{aligned}$$

- $\bar{p}$ e os demais custos relativos não são alterados por δ.
- Como garantir que a base continuará ótima?

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned} s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta. \end{aligned}$$

- $\bar{p}$ e os demais custos relativos não são alterados por δ.
- Como garantir que a base continuará ótima?
  R: $s_k + \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -s_k$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 1: c_k é o custo de uma variável não-básica (i.e. $k \in \mathcal{N}$).

- Após modificar c_k para $c_k + \delta$, o novo custo relativo é dado por

$$\begin{aligned} s'_k &= c_k + \delta - \bar{p}^T a_k \\ &= c_k - \bar{p}^T a_k + \delta \\ &= s_k + \delta. \end{aligned}$$

- $\bar{p}$ e os demais custos relativos não são alterados por δ.
- Como garantir que a base continuará ótima?
  R: $s_k + \delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -s_k$.
- De fato, $\delta < -s_k \Rightarrow s'_k < 0$ e, assim, x_k deveria entrar na base.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
  $c'_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}_1}, \ldots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \ldots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}}.$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
  $c'_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}_1}, \ldots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \ldots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}}.$
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
  $c'_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}_1}, \ldots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \ldots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}}$.
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
  $c'_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}_1}, \ldots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \ldots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}}.$
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

$$p'^T = c'^T_{\mathcal{B}} B^{-1}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
  $c'_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}_1}, \ldots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \ldots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}}$.
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

$$\begin{aligned} p'^T &= c'^T_{\mathcal{B}} B^{-1} \\ &= (c_{\mathcal{B}_1}, \ldots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \ldots, c_{\mathcal{B}_m}) B^{-1} \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
  $c'_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}_1}, \ldots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \ldots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}}.$
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

$$\begin{aligned} p'^T &= c'^T_{\mathcal{B}} B^{-1} \\ &= (c_{\mathcal{B}_1}, \ldots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \ldots, c_{\mathcal{B}_m}) B^{-1} \\ &= p^T + (0, \ldots, \delta, \ldots, 0) B^{-1}. \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Após modificar $c_{\mathcal{B}_l}$ para $c_{\mathcal{B}_l} + \delta$ temos
  $c'_{\mathcal{B}} = (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}), \quad c'_{\mathcal{N}} = c_{\mathcal{N}}.$
- $\bar{p}$ e todos os custos relativos podem sofrer alterações!
- A nova solução dual é dada por:

$$\begin{aligned} p'^T &= c'^T_{\mathcal{B}} B^{-1} \\ &= (c_{\mathcal{B}_1}, \dots, c_{\mathcal{B}_l} + \delta, \dots, c_{\mathcal{B}_m}) B^{-1} \\ &= p^T + (0, \dots, \delta, \dots, 0) B^{-1}. \\ &= p^T + \delta [B^{-1}]_l. \end{aligned}$$

($[B^{-1}]_l$: l-ésima linha da matriz inversa)

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$s'_j \quad = \quad c'_j - p'^T a_j$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l)a_j \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l)a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l)a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \\ &= s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j. \end{aligned}$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$
\begin{aligned}
s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\
&= c_j - (p^T + \delta [B^{-1}]_l) a_j \\
&= c_j - p^T a_j - \delta [B^{-1}]_l a_j \\
&= s_j - \delta [B^{-1}]_l a_j .
\end{aligned}
$$

- Como garantir que a base continuará ótima?

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l)a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \\ &= s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j. \end{aligned}$$

- Como garantir que a base continuará ótima?
  R: $s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Caso 2: c_k é o custo de uma variável básica, com $k = \mathcal{B}_l$.

- Essa mudança influencia nos custos relativos das variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} s'_j &= c'_j - p'^T a_j \\ &= c_j - (p^T + \delta[B^{-1}]_l) a_j \\ &= c_j - p^T a_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \\ &= s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j . \end{aligned}$$

- Como garantir que a base continuará ótima?
  R: $s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \geq 0 \Rightarrow \delta[B^{-1}]_l a_j \leq s_j$.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- Caso contrário, se o custo da l-ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e todos os custos relativos podem mudar (Caso 2);

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- Caso contrário, se o custo da l-ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e todos os custos relativos podem mudar (Caso 2);
- Para que a base $\mathcal{B}$ continue ótima, os custos relativos devem permanecer maiores ou iguais a zero:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- Caso contrário, se o custo da l-ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e todos os custos relativos podem mudar (Caso 2);
- Para que a base $\mathcal{B}$ continue ótima, os custos relativos devem permanecer maiores ou iguais a zero:
  - Caso 1: $s_k + \delta \geq 0$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- Caso contrário, se o custo da l-ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e todos os custos relativos podem mudar (Caso 2);
- Para que a base $\mathcal{B}$ continue ótima, os custos relativos devem permanecer maiores ou iguais a zero:
  - Caso 1: $s_k + \delta \geq 0$;
  - Caso 2: $s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \geq 0$.

Exercício:

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

Resumindo, ao modificar um custo c_k para $c'_k = c_k + \delta$:

- Se $k \in \mathcal{N}$, apenas o custo relativo correspondente pode mudar (Caso 1);
- Caso contrário, se o custo da l-ésima variável de $\mathcal{B}$ muda, então a solução dual e todos os custos relativos podem mudar (Caso 2);
- Para que a base $\mathcal{B}$ continue ótima, os custos relativos devem permanecer maiores ou iguais a zero:
  - Caso 1: $s_k + \delta \geq 0$;
  - Caso 2: $s_j - \delta[B^{-1}]_l a_j \geq 0$.

Exercício:

- No problema das ligas metálicas, determine o intervalo de variação do preço da Liga 1 ($c_1 = 3$) de modo que a solução ótima não se altere.

Problema das ligas metálicas

▷ Iteração ótima do método simplex

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 5\}$;

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3{,}84 & 0 & -2{,}30 \\ 0{,}23 & 1 & -0{,}54 \\ -3{,}07 & 0 & 3{,}84 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica primal:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4{,}62 \\ 0{,}08 \\ 2{,}30 \end{bmatrix}$$

- Calcular a solução básica dual:

$$p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -5{,}36 & 0 & -0{,}78 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= c_3 - p^T a_3 = 5{,}36 \\ s_5 &= c_5 - p^T a_5 = 0{,}78 \end{aligned}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- É possível melhorar essa solução?
- Não! Os custos relativos são ≥ 0.
- Portanto: solução ótima encontrada!
- $x^\star = (4{,}62,\ 2{,}3,\ 0,\ 0{,}08,\ 0)$;
- $f(x^\star) = c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} = -18{,}46$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p, s_3 e s_5 podem ser alterados;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p, s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p, s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s_3' \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p, s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s_3' \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p, s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s_3' \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

$$\Rightarrow 5{,}36 - \delta(3{,}84 \;\; 0 \;\; -2{,}30)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p, s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s'_3 \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

$$\Rightarrow 5{,}36 - \delta(3{,}84 \;\; 0 \;\; -2{,}30) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 5{,}36 - 3{,}84\delta \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p, s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s_3' \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$

$$\Rightarrow 5{,}36 - \delta(3{,}84 \;\; 0 \;\; -2{,}30)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 5{,}36 - 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 1{,}4$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Antes de iniciar, lembre-se que o problema está na forma padrão e, assim, vamos fazer a análise para o custo $c_1 = -3$;
- A base ótima é $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$ e a mudança será do tipo $c_1 + \delta$;
- Como c_1 é coeficiente de uma variável que está em $\mathcal{B}$, então p, s_3 e s_5 podem ser alterados;
- A variável x_1 é a primeira da base e, assim, $l = 1$;
- Para que a base não se altere, devemos ter $s_3' \geq 0 \Rightarrow s_3 - \delta[B^{-1}]_1 a_3 \geq 0$ $$\Rightarrow 5{,}36 - \delta(3{,}84 \;\; 0 \;\; -2{,}30)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 5{,}36 - 3{,}84\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \leq 1{,}4$$
- Logo, pelo custo relativo s_3, podemos mudar c_1 de -3 até $-1{,}6 (= -3 + 1{,}4)$ sem alterar a base ótima.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s_5' \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s_5' \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0{,}78 - \delta(3{,}84 \;\; 0 \;\; -2{,}30) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s_5' \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0{,}78 - \delta(3{,}84 \ 0 \ -2{,}30) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0{,}78 + 2{,}30\delta \geq 0$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0{,}78 - \delta(3{,}84 \;\; 0 \;\; -2{,}30)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0{,}78 + 2{,}30\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}34$$

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s_5' \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$

$$\Rightarrow 0{,}78 - \delta(3{,}84 \ 0 \ \ -2{,}30)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0{,}78 + 2{,}30\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}34$$

- Logo, pelo custo relativo s_5, podemos mudar c_1 de -3 até $-3{,}34(= -3 - 0{,}34)$ sem alterar a base ótima.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$
$$\Rightarrow 0{,}78 - \delta(3{,}84 \;\; 0 \;\; -2{,}30)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0{,}78 + 2{,}30\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}34$$
- Logo, pelo custo relativo s_5, podemos mudar c_1 de -3 até $-3{,}34(= -3 - 0{,}34)$ sem alterar a base ótima.
- Concluindo, *para o problema na forma padrão*, temos que ao variarmos c_1 de $-3{,}34$ a $-1{,}6$ a solução ótima se mantém a mesma.

Análise de sensibilidade

▷ Modificações nos coeficientes da função objetivo (c)

- Da mesma forma, devemos ter $s'_5 \geq 0 \Rightarrow s_5 - \delta[B^{-1}]_1 a_5 \geq 0$
$$\Rightarrow 0{,}78 - \delta(3{,}84 \ 0 \ -2{,}30)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow 0{,}78 + 2{,}30\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq -0{,}34$$
- Logo, pelo custo relativo s_5, podemos mudar c_1 de -3 até $-3{,}34 (= -3 - 0{,}34)$ sem alterar a base ótima.
- Concluindo, *para o problema na forma padrão*, temos que ao variarmos c_1 de $-3{,}34$ a $-1{,}6$ a solução ótima se mantém a mesma.
- Portanto, para o problema das ligas metálicas, o intervalo de variação do custo da liga 1 é de $1{,}6$ a $3{,}34$.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?