



Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção



Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 6.3: Métodos de pontos interiores: passo de Newton, vizinhanças e algoritmo primal-dual

Objetivos deste tópico

- ▶ Entender o passo de Newton, como obtê-lo e como usá-lo no método de pontos interiores;
- ▶ Conhecer diferentes vizinhanças da trajetória central;
- ▶ Estudar o algoritmo primal-dual e aplicá-lo na resolução de problemas de programação linear.

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

- ▶ Como garantir que a essa média é estritamente reduzida de uma iteração para outra?

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

- ▶ Como garantir que a essa média é estritamente reduzida de uma iteração para outra?
- ▶ Dado um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ com $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

- ▶ Como garantir que a essa média é estritamente reduzida de uma iteração para outra?
- ▶ Dado um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ com $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$ que esteja na vizinhança do caminho central,

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

- ▶ Como garantir que a essa média é estritamente reduzida de uma iteração para outra?
- ▶ Dado um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ com $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$ que esteja na vizinhança do caminho central, como podemos obter um novo ponto (x, p, s)

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

- ▶ Como garantir que a essa média é estritamente reduzida de uma iteração para outra?
- ▶ Dado um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ com $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$ que esteja na vizinhança do caminho central, como podemos obter um novo ponto (x, p, s) com $x^T s / n = \sigma \bar{\mu}$, $0 < \sigma < 1$,

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

- ▶ Como garantir que a essa média é estritamente reduzida de uma iteração para outra?
- ▶ Dado um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ com $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$ que esteja na vizinhança do caminho central, como podemos obter um novo ponto (x, p, s) com $x^T s / n = \sigma \bar{\mu}$, $0 < \sigma < 1$, que também esteja na vizinhança?

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

- ▶ Como garantir que a essa média é estritamente reduzida de uma iteração para outra?
- ▶ Dado um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ com $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$ que esteja na vizinhança do caminho central, como podemos obter um novo ponto (x, p, s) com $x^T s / n = \sigma \bar{\mu}$, $0 < \sigma < 1$, que também esteja na vizinhança?
R: Usando o método de Newton!

Método primal-dual de pontos interiores

Vamos responder à seguinte pergunta:

- ▶ Como garantir que a essa média é estritamente reduzida de uma iteração para outra?
- ▶ Dado um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ com $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$ que esteja na vizinhança do caminho central, como podemos obter um novo ponto (x, p, s) com $x^T s / n = \sigma \bar{\mu}$, $0 < \sigma < 1$, que também esteja na vizinhança?
R: Usando o método de Newton!
- ▶ O método de Newton é usado quando queremos encontrar a solução de um sistema não-linear.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Definindo a função $F(x, p, s)$ como:

$$F(x, p, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T p + s - c \\ XSe - \mu e \end{bmatrix}$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Definindo a função $F(x, p, s)$ como:

$$F(x, p, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T p + s - c \\ XSe - \mu e \end{bmatrix}$$

podemos achar a solução $(x(\mu), p(\mu), s(\mu))$ das condições KKT perturbadas aplicando o método de Newton ao sistema $F(x, p, s) = 0$.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Definindo a função $F(x, p, s)$ como:

$$F(x, p, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T p + s - c \\ XSe - \mu e \end{bmatrix}$$

podemos achar a solução $(x(\mu), p(\mu), s(\mu))$ das condições KKT perturbadas aplicando o método de Newton ao sistema $F(x, p, s) = 0$.

- ▶ O método de Newton (também conhecido como Newton-Raphson) é um método iterativo que trabalha com uma **aproximação linear** de F em torno de um dado ponto;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Definindo a função $F(x, p, s)$ como:

$$F(x, p, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T p + s - c \\ XSe - \mu e \end{bmatrix}$$

podemos achar a solução $(x(\mu), p(\mu), s(\mu))$ das condições KKT perturbadas aplicando o método de Newton ao sistema $F(x, p, s) = 0$.

- ▶ O método de Newton (também conhecido como Newton-Raphson) é um método iterativo que trabalha com uma **aproximação linear** de F em torno de um dado ponto;
- ▶ Essa aproximação linear é usada para determinar a **direção de Newton**.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Em geral, dado um sistema de equações não-lineares $g(x) = 0$ e um ponto inicial x^0 , as iterações do método de Newton são dadas por:

$$x^{k+1} = x^k - g(x^k)/g'(x^k)$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Em geral, dado um sistema de equações não-lineares $g(x) = 0$ e um ponto inicial x^0 , as iterações do método de Newton são dadas por:

$$x^{k+1} = x^k - g(x^k)/g'(x^k) = x^k + d^k.$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Em geral, dado um sistema de equações não-lineares $g(x) = 0$ e um ponto inicial x^0 , as iterações do método de Newton são dadas por:

$$x^{k+1} = x^k - g(x^k)/g'(x^k) = x^k + d^k.$$

- ▶ $d^k = -g(x^k)/g'(x^k)$ é a direção de Newton;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Em geral, dado um sistema de equações não-lineares $g(x) = 0$ e um ponto inicial x^0 , as iterações do método de Newton são dadas por:

$$x^{k+1} = x^k - g(x^k)/g'(x^k) = x^k + d^k.$$

- ▶ $d^k = -g(x^k)/g'(x^k)$ é a direção de Newton;
- ▶ O método finaliza quando $g(x^k) = 0$, com a solução x^k .

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Em geral, dado um sistema de equações não-lineares $g(x) = 0$ e um ponto inicial x^0 , as iterações do método de Newton são dadas por:

$$x^{k+1} = x^k - g(x^k)/g'(x^k) = x^k + d^k.$$

- ▶ $d^k = -g(x^k)/g'(x^k)$ é a direção de Newton;
- ▶ O método finaliza quando $g(x^k) = 0$, com a solução x^k .
- ▶ Obs.: O método de Newton também é usado para achar um ótimo (local) de uma função não-linear $f(x)$, dado que se busca por um ponto que satisfaça $f'(x) = 0$;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Para o sistema KKT perturbado, dado o ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$, determinamos a direção de Newton $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resolvendo-se o sistema:

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Para o sistema KKT perturbado, dado o ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$, determinamos a direção de Newton $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resolvendo-se o sistema:

$$\nabla F(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = -F(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}),$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Para o sistema KKT perturbado, dado o ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$, determinamos a direção de Newton $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resolvendo-se o sistema:

$$\nabla F(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = -F(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}),$$

sendo que $\nabla F(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ é a matriz Jacobiana de F :

$$\nabla F(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) = \begin{bmatrix} \nabla_x F_1 & \nabla_p F_1 & \nabla_s F_1 \\ \nabla_x F_2 & \nabla_p F_2 & \nabla_s F_2 \\ \nabla_x F_3 & \nabla_p F_3 & \nabla_s F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix}$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

- ▶ No método de Newton, a direção $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resultante é usada para determinar um novo ponto:

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

- ▶ No método de Newton, a direção $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resultante é usada para determinar um novo ponto:

$$(x, p, s) =$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

- ▶ No método de Newton, a direção $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resultante é usada para determinar um novo ponto:

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) +$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

- ▶ No método de Newton, a direção $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resultante é usada para determinar um novo ponto:

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + (\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

- ▶ No método de Newton, a direção $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resultante é usada para determinar um novo ponto:

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + (\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

levando a uma nova iteração.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

- ▶ No método de Newton, a direção $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resultante é usada para determinar um novo ponto:

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + (\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

levando a uma nova iteração. A cada iteração, $F(x, p, s) \rightarrow 0$.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Reescrevendo, temos que:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

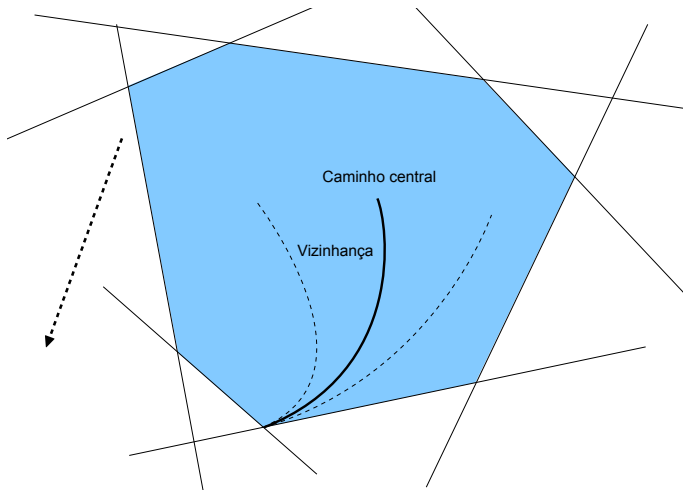
- ▶ No método de Newton, a direção $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ resultante é usada para determinar um novo ponto:

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + (\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

levando a uma nova iteração. A cada iteração, $F(x, p, s) \rightarrow 0$.

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.

Método primal-dual de pontos interiores



Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.
- ▶ Porém, esse ponto terá $\mu = \bar{\mu}$,

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.
- ▶ Porém, esse ponto terá $\mu = \bar{\mu}$, isto é, o parâmetro de barreira irá se manter igual;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.
- ▶ Porém, esse ponto terá $\mu = \bar{\mu}$, isto é, o parâmetro de barreira irá se manter igual; (lembre-se que queremos um novo ponto com μ estritamente menor)

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.
- ▶ Porém, esse ponto terá $\mu = \bar{\mu}$, isto é, o parâmetro de barreira irá se manter igual; (lembre-se que queremos um novo ponto com μ estritamente menor)
- ▶ Assim, calculamos $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ usando $\sigma\mu$ em vez de μ , para $0 < \sigma < 1$:

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.
- ▶ Porém, esse ponto terá $\mu = \bar{\mu}$, isto é, o parâmetro de barreira irá se manter igual; (lembre-se que queremos um novo ponto com μ estritamente menor)
- ▶ Assim, calculamos $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ usando $\sigma\mu$ em vez de μ , para $0 < \sigma < 1$:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \sigma\bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.
- ▶ Porém, esse ponto terá $\mu = \bar{\mu}$, isto é, o parâmetro de barreira irá se manter igual; (lembre-se que queremos um novo ponto com μ estritamente menor)
- ▶ Assim, calculamos $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ usando $\sigma\mu$ em vez de μ , para $0 < \sigma < 1$:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \sigma\bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

- ▶ Além disso, não precisamos obter um ponto estritamente no caminho central.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ No caso das condições KKT perturbadas, se aplicarmos o método de Newton até sua convergência, obtemos um ponto no caminho central.
- ▶ Porém, esse ponto terá $\mu = \bar{\mu}$, isto é, o parâmetro de barreira irá se manter igual; (lembre-se que queremos um novo ponto com μ estritamente menor)
- ▶ Assim, calculamos $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ usando $\sigma\mu$ em vez de μ , para $0 < \sigma < 1$:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T\bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \sigma\bar{\mu}e \end{bmatrix},$$

- ▶ Além disso, não precisamos obter um ponto estritamente no caminho central. Basta que ele esteja na vizinhança!

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Assim, aplicamos uma única iteração do método de Newton para $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Assim, aplicamos uma única iteração do método de Newton para $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;
- ▶ Para garantir que a nova solução permaneça na vizinhança, usamos um tamanho de passo $\bar{\alpha} > 0$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Assim, aplicamos uma única iteração do método de Newton para $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;
- ▶ Para garantir que a nova solução permaneça na vizinhança, usamos um tamanho de passo $\bar{\alpha} > 0$ tal que

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Assim, aplicamos uma única iteração do método de Newton para $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;
- ▶ Para garantir que a nova solução permaneça na vizinhança, usamos um tamanho de passo $\bar{\alpha} > 0$ tal que

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

sendo que $\bar{\alpha}$ é o máximo valor possível tal que (x, p, s) permaneça na vizinhança.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Diferentes tipos de vizinhança podem ser definidas;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Diferentes tipos de vizinhança podem ser definidas;
- ▶ Vizinhança estreita (*narrow neighborhood*):

$$\mathcal{N}_2(\theta) = \{(x, p, s) \mid \|XSe - \mu e\|_2 \leq \theta\mu\};$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Diferentes tipos de vizinhança podem ser definidas;
- ▶ Vizinhança estreita (*narrow neighborhood*):

$$\mathcal{N}_2(\theta) = \{(x, p, s) \mid \|XSe - \mu e\|_2 \leq \theta\mu\};$$

- ▶ Lembrando que como as soluções não estão necessariamente sobre o caminho central, não se pode garantir $x_j s_j = \mu$, para todo $j = 1, \dots, n$, mas sim que μ é a **média** das folgas complementares:

$$\mu = \frac{x^T s}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j s_j.$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Diferentes tipos de vizinhança podem ser definidas;
- ▶ Vizinhança estreita (*narrow neighborhood*):

$$\mathcal{N}_2(\theta) = \{(x, p, s) \mid \|XSe - \mu e\|_2 \leq \theta\mu\};$$

- ▶ Lembrando que como as soluções não estão necessariamente sobre o caminho central, não se pode garantir $x_j s_j = \mu$, para todo $j = 1, \dots, n$, mas sim que μ é a **média** das folgas complementares:

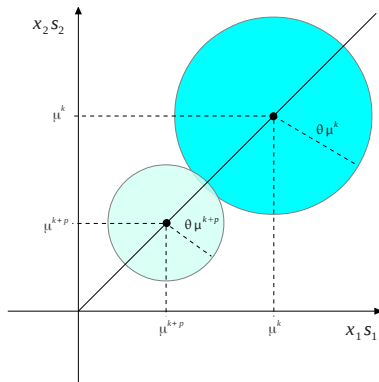
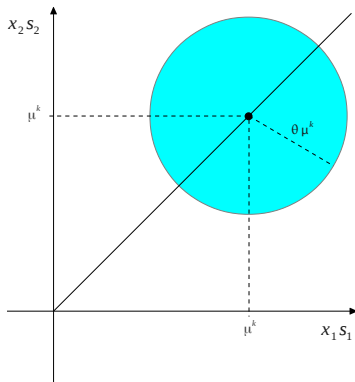
$$\mu = \frac{x^T s}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j s_j.$$

- ▶ Assim, a vizinhança controla a distância entre os produtos $x_j s_j$ e a média μ desses produtos (para um dado ponto);
- ▶ A distância de um ponto na vizinhança até o ponto na trajetória central com o respectivo μ , não pode ultrapassar uma fração de μ .

Método primal-dual de pontos interiores

- Vizinhança estreita (*narrow neighborhood*):

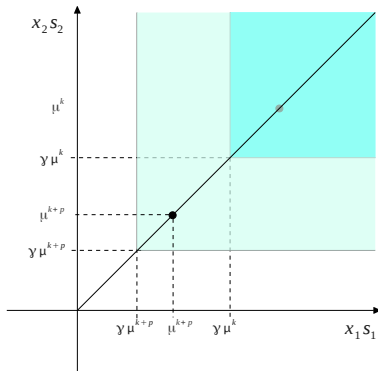
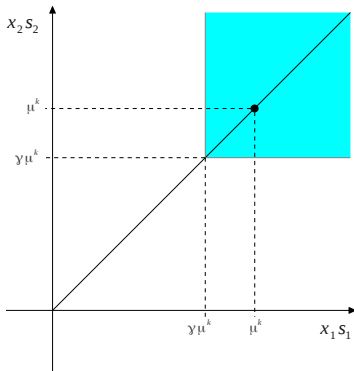
$$\mathcal{N}_2(\theta) = \{(x, p, s) \mid \|XSe - \mu e\|_2 \leq \theta\mu\}.$$



Método primal-dual de pontos interiores

- Vizinhança ampla (*wide neighborhood*):

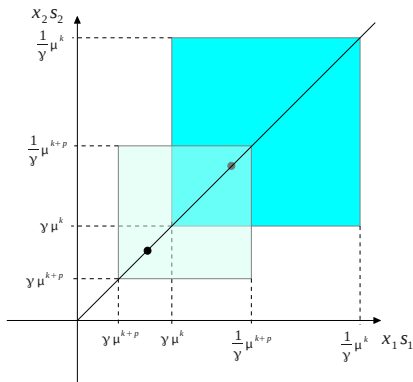
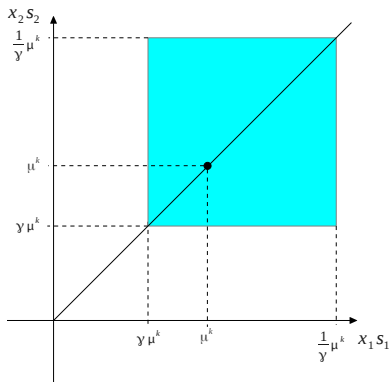
$$\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma) = \{(x, p, s) \mid x_j s_j \geq \gamma \mu, \forall j = 1, \dots, n\}, \gamma \in (0, 1).$$



Método primal-dual de pontos interiores

- Vizinhança simétrica (*symmetrical neighborhood*)

$$\mathcal{N}_s(\gamma) = \{(x, p, s) \mid \gamma\mu \leq x_j s_j \leq (1/\gamma)\mu, \forall j = 1, \dots, n\}, \gamma \in (0, 1).$$



Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Assim, aplicamos uma **única** iteração do método de Newton para $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;
- ▶ Para garantir que a nova solução permaneça na vizinhança, usamos um tamanho de passo $\bar{\alpha} > 0$ tal que

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

sendo que $\bar{\alpha}$ é o máximo valor possível tal que (x, p, s) permaneça na vizinhança.

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Assim, aplicamos uma **única** iteração do método de Newton para $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;
- ▶ Para garantir que a nova solução permaneça na vizinhança, usamos um tamanho de passo $\bar{\alpha} > 0$ tal que

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

sendo que $\bar{\alpha}$ é o máximo valor possível tal que (x, p, s) permaneça na vizinhança.

- ▶ Por exemplo, para $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma) = \{(x, p, s) \mid x_j s_j \geq \gamma \mu, \forall j = 1, \dots, n\}$:

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Assim, aplicamos uma **única** iteração do método de Newton para $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;
- ▶ Para garantir que a nova solução permaneça na vizinhança, usamos um tamanho de passo $\bar{\alpha} > 0$ tal que

$$(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$$

sendo que $\bar{\alpha}$ é o máximo valor possível tal que (x, p, s) permaneça na vizinhança.

- ▶ Por exemplo, para $\mathcal{N}_{-\infty}(\gamma) = \{(x, p, s) \mid x_j s_j \geq \gamma \mu, \forall j = 1, \dots, n\}$:

$$\bar{\alpha} = \max\{\alpha \mid (x_j + \alpha \Delta x_j)(s_j + \alpha \Delta s_j) \geq \gamma (x + \alpha \Delta x)^T (s + \alpha \Delta s) / n, \forall j = 1, \dots, n\}$$

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Algumas implementações escolhem o tamanho do passo sem considerar uma vizinhança do caminho central, exigindo apenas que $(\bar{x}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta s) > 0$; (teste da razão simples)

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Algumas implementações escolhem o tamanho do passo sem considerar uma vizinhança do caminho central, exigindo apenas que $(\bar{x}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta s) > 0$; (teste da razão simples)
- ▶ Isso agiliza o cálculo e permite que passos maiores sejam atingidos;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Algumas implementações escolhem o tamanho do passo sem considerar uma vizinhança do caminho central, exigindo apenas que $(\bar{x}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta s) > 0$; (teste da razão simples)
- ▶ Isso agiliza o cálculo e permite que passos maiores sejam atingidos;
- ▶ Entretanto, exige monitoramento cuidadoso da centralidade das soluções;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Algumas implementações escolhem o tamanho do passo sem considerar uma vizinhança do caminho central, exigindo apenas que $(\bar{x}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta s) > 0$; (teste da razão simples)
- ▶ Isso agiliza o cálculo e permite que passos maiores sejam atingidos;
- ▶ Entretanto, exige monitoramento cuidadoso da centralidade das soluções;
- ▶ É comum usarmos um multiplicador α_0 (por exemplo 0.95) multiplicando o máximo tamanho de passo possível;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Algumas implementações escolhem o tamanho do passo sem considerar uma vizinhança do caminho central, exigindo apenas que $(\bar{x}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta s) > 0$; (teste da razão simples)
- ▶ Isso agiliza o cálculo e permite que passos maiores sejam atingidos;
- ▶ Entretanto, exige monitoramento cuidadoso da centralidade das soluções;
- ▶ É comum usarmos um multiplicador α_0 (por exemplo 0.95) multiplicando o máximo tamanho de passo possível;
- ▶ Outra prática comum é calcular tamanhos de passo separados para os espaços primal e dual;

Método primal-dual de pontos interiores

- ▶ Algumas implementações escolhem o tamanho do passo sem considerar uma vizinhança do caminho central, exigindo apenas que $(\bar{x}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta s) > 0$; (teste da razão simples)
- ▶ Isso agiliza o cálculo e permite que passos maiores sejam atingidos;
- ▶ Entretanto, exige monitoramento cuidadoso da centralidade das soluções;
- ▶ É comum usarmos um multiplicador α_0 (por exemplo 0.95) multiplicando o máximo tamanho de passo possível;
- ▶ Outra prática comum é calcular tamanhos de passo separados para os espaços primal e dual;
- ▶ Assim, calcula-se $\bar{\alpha}_p$ tal que $\bar{x} + \bar{\alpha}_p \Delta x > 0$ e $\bar{\alpha}_d$ tal que $\bar{s} + \bar{\alpha}_d \Delta s > 0$.

Método primal-dual de pontos interiores

Resumindo:

- ▶ Seja um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ em uma vizinhança do caminho central;

Método primal-dual de pontos interiores

Resumindo:

- ▶ Seja um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ em uma vizinhança do caminho central;
- ▶ Associado a este ponto, temos o parâmetro de barreira médio $\bar{\mu} = \frac{\bar{x}^T \bar{s}}{n}$;

Método primal-dual de pontos interiores

Resumindo:

- ▶ Seja um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ em uma vizinhança do caminho central;
- ▶ Associado a este ponto, temos o parâmetro de barreira médio $\bar{\mu} = \frac{\bar{x}^T \bar{s}}{n}$;
- ▶ Queremos calcular um novo ponto (x, p, s) que permaneça na vizinhança

Método primal-dual de pontos interiores

Resumindo:

- ▶ Seja um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ em uma vizinhança do caminho central;
- ▶ Associado a este ponto, temos o parâmetro de barreira médio $\bar{\mu} = \frac{\bar{x}^T \bar{s}}{n}$;
- ▶ Queremos calcular um novo ponto (x, p, s) que permaneça na vizinhança e que $\mu = \frac{x^T s}{n}$ satisfaça

Método primal-dual de pontos interiores

Resumindo:

- ▶ Seja um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ em uma vizinhança do caminho central;
- ▶ Associado a este ponto, temos o parâmetro de barreira médio $\bar{\mu} = \frac{\bar{x}^T \bar{s}}{n}$;
- ▶ Queremos calcular um novo ponto (x, p, s) que permaneça na vizinhança e que $\mu = \frac{x^T s}{n}$ satisfaça $\mu < \bar{\mu}$;

Método primal-dual de pontos interiores

Resumindo:

- ▶ Seja um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ em uma vizinhança do caminho central;
- ▶ Associado a este ponto, temos o parâmetro de barreira médio $\bar{\mu} = \frac{\bar{x}^T \bar{s}}{n}$;
- ▶ Queremos calcular um novo ponto (x, p, s) que permaneça na vizinhança e que $\mu = \frac{x^T s}{n}$ satisfaça $\mu < \bar{\mu}$;
- ▶ Para isso, calculamos a direção de Newton $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$, partindo do ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;

Método primal-dual de pontos interiores

Resumindo:

- ▶ Seja um ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ em uma vizinhança do caminho central;
- ▶ Associado a este ponto, temos o parâmetro de barreira médio $\bar{\mu} = \frac{\bar{x}^T \bar{s}}{n}$;
- ▶ Queremos calcular um novo ponto (x, p, s) que permaneça na vizinhança e que $\mu = \frac{x^T s}{n}$ satisfaça $\mu < \bar{\mu}$;
- ▶ Para isso, calculamos a direção de Newton $(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$, partindo do ponto $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$;
- ▶ Escolhemos o maior tamanho de passo α tal que $(x, p, s) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$ permaneça na vizinhança.

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada:

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ;
 $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Passo 2: Se $\|A\bar{x} - b\| \leq \delta_p$

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Passo 2: Se $\|A\bar{x} - b\| \leq \delta_p$ e $\|A^T \bar{p} + \bar{s} - c\| \leq \delta_d$

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Passo 2: Se $\|A\bar{x} - b\| \leq \delta_p$ e $\|A^T \bar{p} + \bar{s} - c\| \leq \delta_d$ e $\bar{\mu} \leq \delta_o$

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Passo 2: Se $\|A\bar{x} - b\| \leq \delta_p$ e $\|A^T \bar{p} + \bar{s} - c\| \leq \delta_d$ e $\bar{\mu} \leq \delta_o$
então **PARE!**

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Passo 2: Se $\|A\bar{x} - b\| \leq \delta_p$ e $\|A^T \bar{p} + \bar{s} - c\| \leq \delta_d$ e $\bar{\mu} \leq \delta_o$
então **PARE!** Solução ótima encontrada;

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Passo 2: Se $\|A\bar{x} - b\| \leq \delta_p$ e $\|A^T \bar{p} + \bar{s} - c\| \leq \delta_d$ e $\bar{\mu} \leq \delta_o$
então **PARE!** Solução ótima encontrada;

Passo 3: Determine a direção de Newton:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T \bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \sigma\bar{\mu}e \end{bmatrix}$$

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Passo 2: Se $\|A\bar{x} - b\| \leq \delta_p$ e $\|A^T \bar{p} + \bar{s} - c\| \leq \delta_d$ e $\bar{\mu} \leq \delta_o$
então **PARE!** Solução ótima encontrada;

Passo 3: Determine a direção de Newton:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T \bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X}\bar{S}e - \sigma \bar{\mu} e \end{bmatrix}$$

Passo 4: Determine o tamanho de passo:

$$\bar{\alpha} = \max\{\alpha \mid (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \alpha(\Delta x, \Delta p, \Delta s) \in \mathcal{N}_*\}$$

Método primal-dual de pontos interiores: Algoritmo

Entrada: Solução inicial $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s})$ t.q. $(\bar{x}, \bar{s}) > 0$ e pertença a uma vizinhança \mathcal{N}_* ; $\sigma \in (0, 1)$; tolerâncias δ_p , δ_d e δ_o .

Passo 1: $\bar{\mu} = \bar{x}^T \bar{s} / n$;

Passo 2: Se $\|A\bar{x} - b\| \leq \delta_p$ e $\|A^T \bar{p} + \bar{s} - c\| \leq \delta_d$ e $\bar{\mu} \leq \delta_o$
então **PARE!** Solução ótima encontrada;

Passo 3: Determine a direção de Newton:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\bar{x} - b \\ A^T \bar{p} + \bar{s} - c \\ \bar{X} \bar{S} e - \sigma \bar{\mu} e \end{bmatrix}$$

Passo 4: Determine o tamanho de passo:

$$\bar{\alpha} = \max\{\alpha \mid (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \alpha(\Delta x, \Delta p, \Delta s) \in \mathcal{N}_*\}$$

Passo 5: Atualize a solução atual: $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) = (\bar{x}, \bar{p}, \bar{s}) + \bar{\alpha}(\Delta x, \Delta p, \Delta s)$

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Alguns comentários

- ▶ No método infactível, permite-se que a solução inicial (e as intermediárias) viole(m) $Ax = b$ e $A^T p + s = c$;

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Alguns comentários

- ▶ No método infactível, permite-se que a solução inicial (e as intermediárias) viole(m) $Ax = b$ e $A^T p + s = c$;
- ▶ Em geral, a factibilidade é obtida já nas primeiras iterações;

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Alguns comentários

- ▶ No método infactível, permite-se que a solução inicial (e as intermediárias) viole(m) $Ax = b$ e $A^T p + s = c$;
- ▶ Em geral, a factibilidade é obtida já nas primeiras iterações;
- ▶ Após um determinado número de iterações, se as infactibilidades primal ou dual não tendem a zero, então o problema é infactível/ilimitado; (também detectável pelas funções objetivo)

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Alguns comentários

- ▶ No método infactível, permite-se que a solução inicial (e as intermediárias) viole(m) $Ax = b$ e $A^T p + s = c$;
- ▶ Em geral, a factibilidade é obtida já nas primeiras iterações;
- ▶ Após um determinado número de iterações, se as infactibilidades primal ou dual não tendem a zero, então o problema é infactível/ilimitado; (também detectável pelas funções objetivo)
- ▶ No método factível, todas as soluções devem satisfazer $Ax = b$ e $A^T p + s = c$

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Alguns comentários

- ▶ No método inactível, permite-se que a solução inicial (e as intermediárias) viole(m) $Ax = b$ e $A^T p + s = c$;
- ▶ Em geral, a factibilidade é obtida já nas primeiras iterações;
- ▶ Após um determinado número de iterações, se as inactibilidades primal ou dual não tendem a zero, então o problema é inactível/ilimitado; (também detectável pelas funções objetivo)
- ▶ No método factível, todas as soluções devem satisfazer $Ax = b$ e $A^T p + s = c$ e, assim, as direções são calculadas por

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ \bar{S} & 0 & \bar{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta p \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{X}\bar{S}e - \sigma\bar{\mu}e \end{bmatrix}$$

Lesaja, 2009

The Open Operational Research Journal, 2009, 3, 1-12

1

Open Access

Introducing Interior-Point Methods for Introductory Operations Research Courses and/or Linear Programming Courses

Goran Lesaja*

Department of Mathematical Sciences, Georgia Southern University, Georgia Ave. 203, Statesboro, GA 30460-8093, USA

Abstract: In recent years the introduction and development of Interior-Point Methods has had a profound impact on optimization theory as well as practice, influencing the field of Operations Research and related areas. Development of these methods has quickly led to the design of new and efficient optimization codes particularly for Linear Programming. Consequently, there has been an increasing need to introduce theory and methods of this new area in optimization into the appropriate undergraduate and first year graduate courses such as introductory Operations Research and/or Linear Programming courses, Industrial Engineering courses and Math Modeling courses. The objective of this paper is to discuss the ways of simplifying the introduction of Interior-Point Methods for students who have various backgrounds or who are not necessarily mathematics majors.

Keywords: Interior-point methods, simplex method, Newton's method, linear programming, optimization, operations research, teaching issues.

1. INTRODUCTION

During the last two decades, the optimization and operations research community has witnessed an explosive development in the area of optimization theory due to the

courses and Math Modeling courses. However, the standard approach to IPMs involves extensive background knowledge on advanced topics that are usually part of Nonlinear Programming course such as Lagrange functions, Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions, and penalty and barrier

Gondzio, 2012

European Journal of Operational Research 218 (2012) 587–601



ELSEVIER

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

European Journal of Operational Research

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ejor

Invited Review

Interior point methods 25 years later[☆]

Jacek Gondzio

School of Mathematics and Maxwell Institute for Mathematical Sciences, The University of Edinburgh, Mayfield Road, Edinburgh EH9 3JZ, United Kingdom

ARTICLE INFO

Article history:

Received 23 February 2011

Accepted 11 September 2011

Available online 19 September 2011

Keywords:

Interior point methods

Linear programming

Quadratic programming

Worst-case complexity analysis

Implementation

Matrix-free methods

ABSTRACT

Interior point methods for optimization have been around for more than 25 years now. Their presence has shaken up the field of optimization. Interior point methods for linear and (convex) quadratic programming display several features which make them particularly attractive for very large scale optimization. Among the most impressive of them are their low-degree polynomial worst-case complexity and an unrivalled ability to deliver optimal solutions in an almost constant number of iterations which depends very little, if at all, on the problem dimension. Interior point methods are competitive when dealing with small problems of dimensions below one million constraints and variables and are beyond competition when applied to large problems of dimensions going into millions of constraints and variables.

In this survey we will discuss several issues related to interior point methods including the proof of the worst-case complexity result, the reasons for their amazingly fast practical convergence and the features responsible for their ability to solve very large problems. The ever-growing sizes of optimization problems impose new requirements on optimization methods and software. In the final part of this paper we will therefore address a redesign of interior point methods to allow them to work in a matrix-free regime and to make them well-suited to solving even larger problems.

© 2011 Elsevier B.V. All rights reserved.

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Exercício

Determine a solução ótima usando o método primal-dual de pontos interiores:

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Exercício

Determine a solução ótima usando o método primal-dual de pontos interiores:

$$\min \quad -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 = 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 + x_4 = 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Exercício: Inicialização

Dados do problema:

$$c^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Começamos com a solução inicial arbitrária:

$$\bar{x} = (2, 2, 1,4, 0,4, 1,2), \quad \bar{p} = (-5, -5, -5), \quad \bar{s} = (2, 3, 5, 5, 5)$$

(escolhemos $x_1 = x_2 = 2$ e as demais são determinadas pelo sistema primal; de forma análoga, escolhemos \bar{p} de modo a se ter $\bar{s} > 0$ pelo sistema dual)

Parâmetros: $\sigma = 0,5$; $\delta_p = \delta_d = \delta_o = 0,01$; $\alpha_0 = 0,95$.

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Exercício: Código em Octave

```
A = [0.5 0.3 1 0 0; 0.1 0.2 0 1 0; 0.4 0.5 0 0 1]
```

```
c = [-3; -2; 0; 0; 0]
```

```
b = [3; 1; 3]
```

```
n = 5
```

```
m = 3
```

```
x = [2 ; 2; 1.4; 0.4; 1.2]
```

```
p = [-5; -5; -5]
```

```
s = [2; 3; 5; 5; 5]
```

```
sigma = 0.5
```

```
alpha0 = 0.95
```

```
e = [1; 1; 1; 1; 1]
```

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Exercício: Código em Octave

```
mu = (x' * s) / n

X = diag(x)
S = diag(s)

J = [A zeros(m,m) zeros(m,n); zeros(n,n) A' eye(n); S zeros(n,m) X]
F = [A * x - b; A' * p + s - c; X * S * e - sigma * mu * e]
D = J \ (-F)

Dx = D(1:n)
Dp = D(n+1:n+m)
Ds = D(n+m+1:2*n+m)

-x ./ Dx
-s ./ Ds

alpha = alpha0 * (- s(1)/Ds(1)) /* Coloque aqui a variável com menor razão */

x = x + alpha * Dx
p = p + alpha * Dp
s = s + alpha * Ds
```

Método primal-dual de pontos interiores

▷ Exercício

Determine a solução ótima usando o método primal-dual de pontos interiores, *permitindo tamanhos de passo diferentes para os espaços primal e dual, e usando uma das vizinhanças definidas em aula:*

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- ▶ Obrigado pela atenção!
- ▶ Dúvidas?