Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 7.2: Relaxação linear, arredondamento e ideia do método *Branch-and-Bound*

Objetivos deste tópico

- Estudar os conceitos de Relaxação Linear e arredondamento;
- Conhecer a ideia do método *Branch-and-Bound* e um pouco de sua história.

Programação inteira: Métodos de solução

Retomando o modelo de programação inteira do exemplo inicial:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Relaxação linear

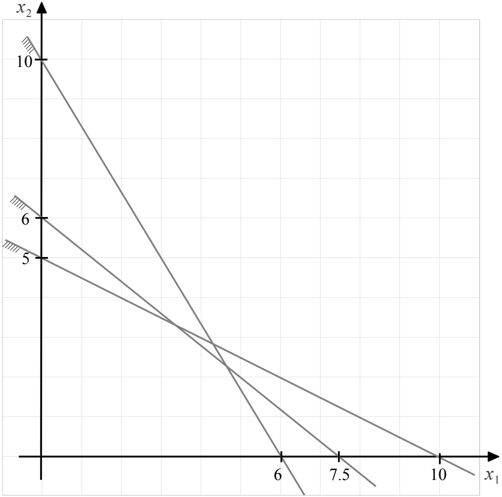
Se trocarmos as restrições de integralidade, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$, pelas restrições de não-negatividade, $x_1, x_2 \geq 0$, obtemos a relaxação linear do modelo:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Programação inteira

▷ Relaxação linear

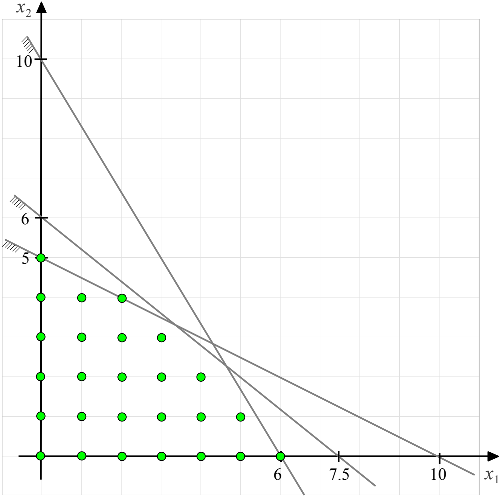
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 3 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 1 \\
 & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 3 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



Programação inteira

▷ Relaxação linear

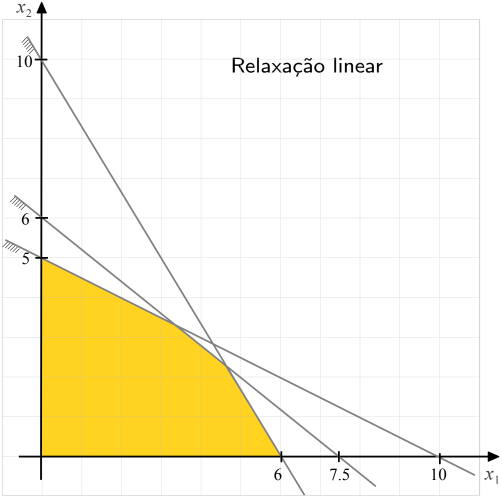
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$



Programação inteira

▷ Relaxação linear

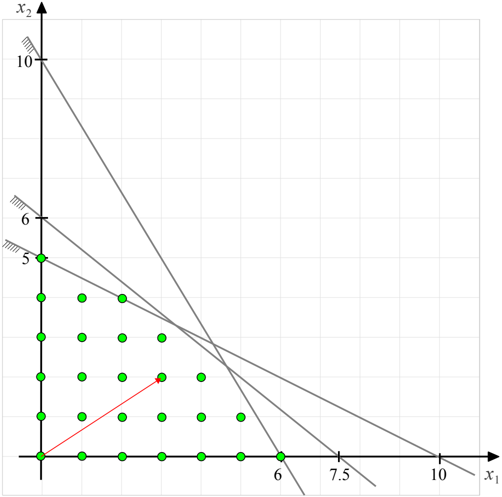
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Programação inteira

▷ Relaxação linear

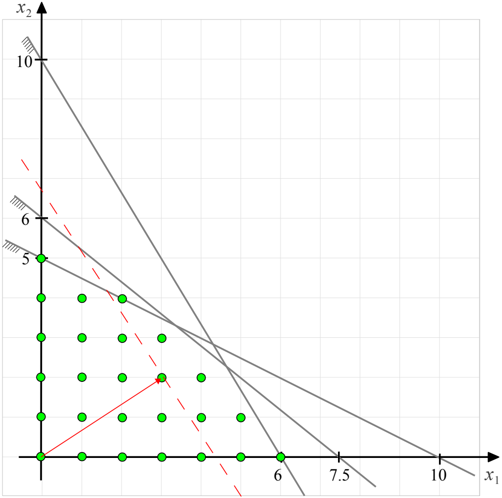
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$



Programação inteira

▷ Relaxação linear

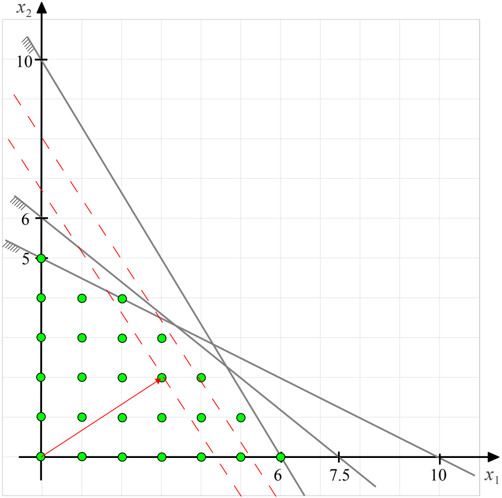
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



Programação inteira

▷ Relaxação linear

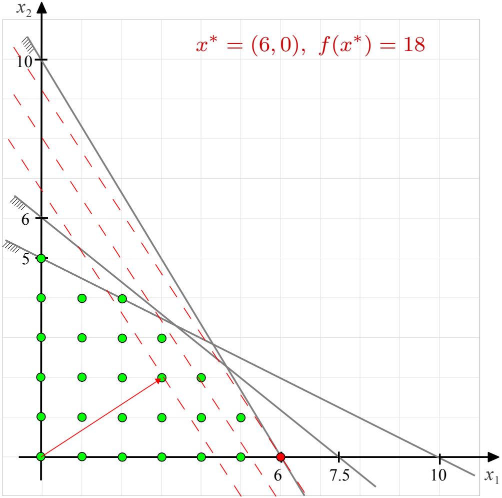
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



Programação inteira

▷ Relaxação linear

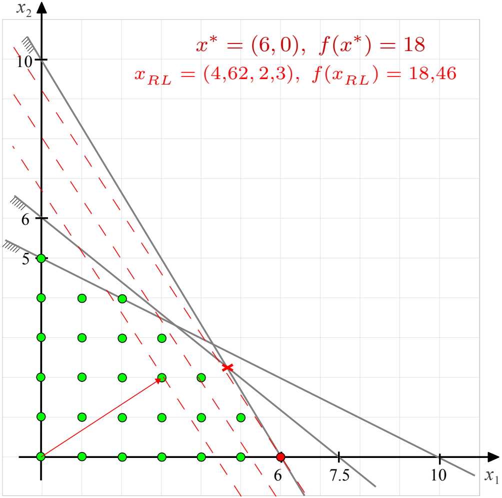
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



Programação inteira

▷ Relaxação linear

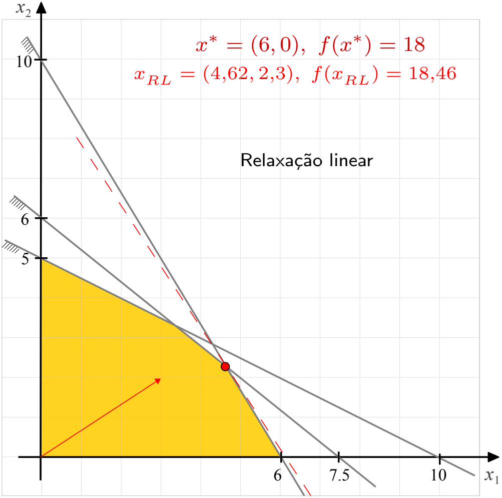
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
 & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
 & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
 & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



Programação inteira

▷ Relaxação linear

$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Programação inteira: Métodos de solução

▷ Relaxação linear

- A solução ótima da relaxação linear deste problema é $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30)$, com valor ótimo $f(x_{RL}) \approx 18{,}46$.

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Relaxação linear

- A solução ótima da relaxação linear deste problema é $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30)$, com valor ótimo $f(x_{RL}) \approx 18{,}46$.
- Assim, esta solução é fracionária e não corresponde a uma solução factível do modelo de programação inteira.

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Relaxação linear

- A solução ótima da relaxação linear deste problema é $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30)$, com valor ótimo $f(x_{RL}) \approx 18{,}46$.
- Assim, esta solução é fracionária e não corresponde a uma solução factível do modelo de programação inteira.
- Como obter uma solução ótima do modelo original?

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Relaxação linear

- A solução ótima da relaxação linear deste problema é $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30)$, com valor ótimo $f(x_{RL}) \approx 18{,}46$.
- Assim, esta solução é fracionária e não corresponde a uma solução factível do modelo de programação inteira.
- Como obter uma solução ótima do modelo original?
  - Arredondamento?

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Relaxação linear

- A solução ótima da relaxação linear deste problema é $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30)$, com valor ótimo $f(x_{RL}) \approx 18{,}46$.
- Assim, esta solução é fracionária e não corresponde a uma solução factível do modelo de programação inteira.
- Como obter uma solução ótima do modelo original?
  - Arredondamento?
  - Método simplex?

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Relaxação linear

- A solução ótima da relaxação linear deste problema é $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30)$, com valor ótimo $f(x_{RL}) \approx 18{,}46$.
- Assim, esta solução é fracionária e não corresponde a uma solução factível do modelo de programação inteira.
- Como obter uma solução ótima do modelo original?
  - Arredondamento?
  - Método simplex?
- Será que ainda temos um *certificado de otimalidade* como em programação linear?

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Para obter uma solução inteira, poderíamos arredondar a solução ótima da relaxação linear.

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Para obter uma solução inteira, poderíamos arredondar a solução ótima da relaxação linear. Por exemplo, arredondamos cada coordenada para o inteiro mais próximo:

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Para obter uma solução inteira, poderíamos arredondar a solução ótima da relaxação linear. Por exemplo, arredondamos cada coordenada para o inteiro mais próximo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (5,\ 2)$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Para obter uma solução inteira, poderíamos arredondar a solução ótima da relaxação linear. Por exemplo, arredondamos cada coordenada para o inteiro mais próximo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \to x_{PI} = (5,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Para obter uma solução inteira, poderíamos arredondar a solução ótima da relaxação linear. Por exemplo, arredondamos cada coordenada para o inteiro mais próximo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (5,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?
  Substituindo na primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Para obter uma solução inteira, poderíamos arredondar a solução ótima da relaxação linear. Por exemplo, arredondamos cada coordenada para o inteiro mais próximo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (5,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?
  Substituindo na primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 3{,}1 \leq 3$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Para obter uma solução inteira, poderíamos arredondar a solução ótima da relaxação linear. Por exemplo, arredondamos cada coordenada para o inteiro mais próximo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \to x_{PI} = (5,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?
  Substituindo na primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \to 3{,}1 \leq 3$
  Logo, apesar de inteira, x_{PI} é infactível :(

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Para obter uma solução inteira, poderíamos arredondar a solução ótima da relaxação linear. Por exemplo, arredondamos cada coordenada para o inteiro mais próximo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (5,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?
  Substituindo na primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 3{,}1 \leq 3$
  Logo, apesar de inteira, x_{PI} é infactível :(
- E agora?

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?
  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?
  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?

  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

  Segunda restrição: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?
  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$
  Segunda restrição: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \rightarrow 0{,}8 \leq 1$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?

  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

  Segunda restrição: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \rightarrow 0{,}8 \leq 1$

  Terceira restrição: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?
  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$
  Segunda restrição: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \rightarrow 0{,}8 \leq 1$
  Terceira restrição: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?

  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

  Segunda restrição: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \rightarrow 0{,}8 \leq 1$

  Terceira restrição: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

  Logo, x_{PI} é uma solução factível :)

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?

  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

  Segunda restrição: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \rightarrow 0{,}8 \leq 1$

  Terceira restrição: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

  Logo, x_{PI} é uma solução factível :)

  Valor na função objetivo: $f(x_{PI}) = 16$.

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Arredondamento

Outra saída, seria arredondarmos cada coordenada para baixo:

- $x_{RL} \approx (4{,}62,\ 2{,}30) \rightarrow x_{PI} = (4,\ 2)$
- x_{PI} é uma solução factível do modelo?

  Primeira restrição: $0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

  Segunda restrição: $0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \rightarrow 0{,}8 \leq 1$

  Terceira restrição: $0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \rightarrow 2{,}6 \leq 3$

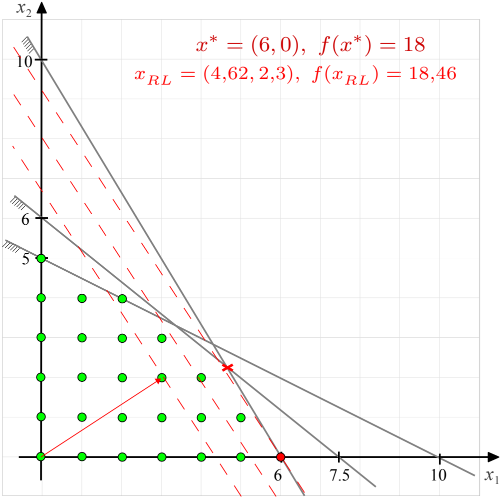
  Logo, x_{PI} é uma solução factível :)

  Valor na função objetivo: $f(x_{PI}) = 16$.
- Mas será que é ótima? :S

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

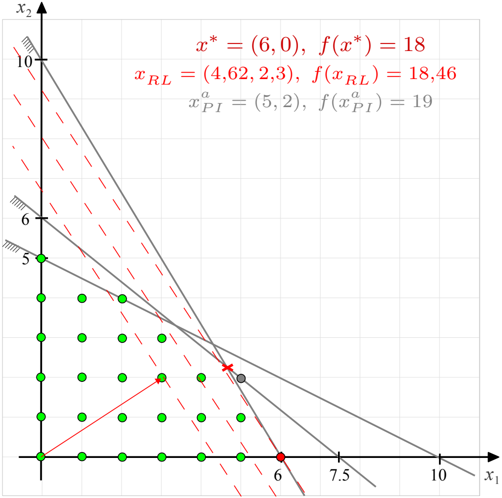
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$



Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

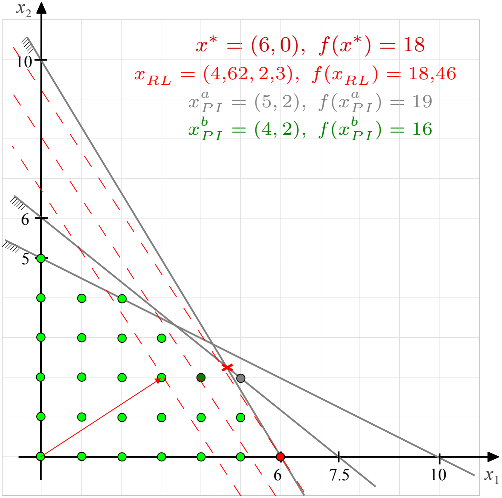
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$



Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$



Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

- Qual seria a solução ótima caso o custo da liga 1 fosse reduzido para R$ 2 mil/barra?

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

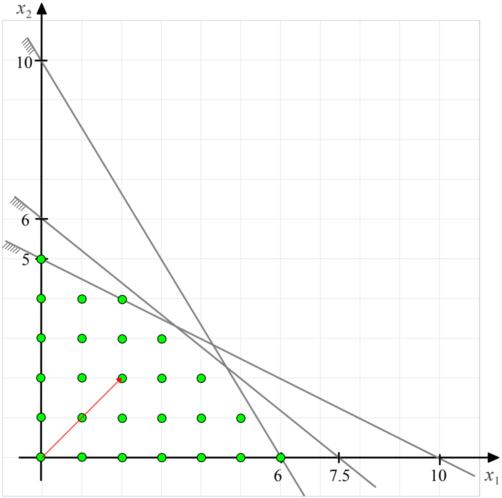
- Qual seria a solução ótima caso o custo da liga 1 fosse reduzido para R$ 2 mil/barra?

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

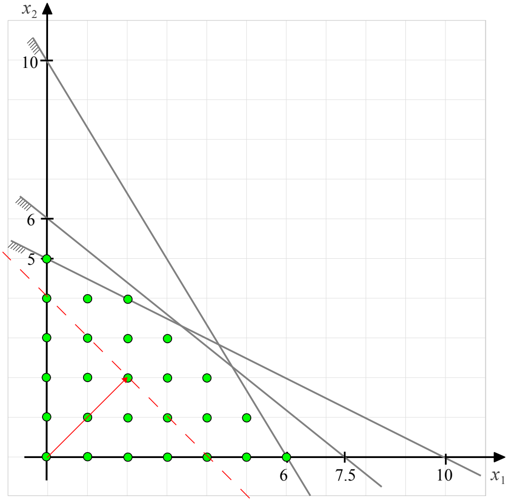
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$



Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

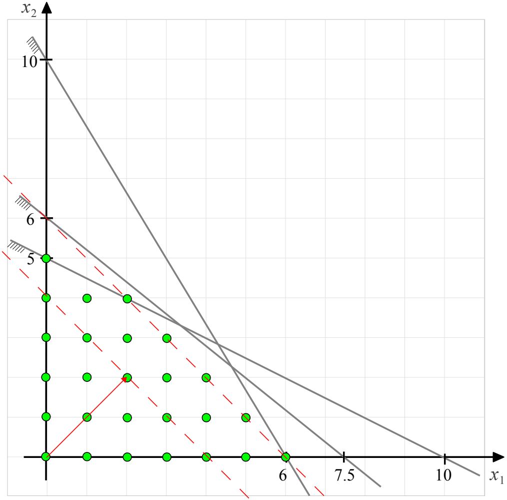
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

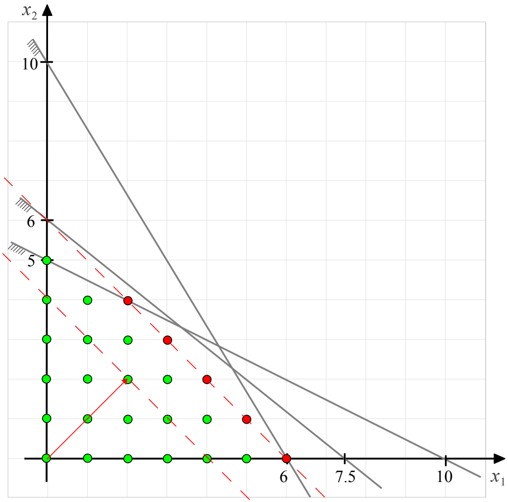
$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}$$



Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

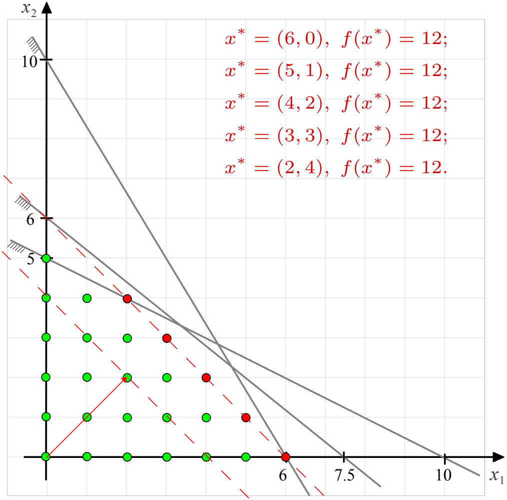
$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



Programação inteira: Métodos de solução

▷ Solução gráfica

$$\begin{array}{ll} \text{max} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{array}$$



Programação inteira: Métodos de solução

Programação inteira: Métodos de solução

- Relaxação linear e arredondamento não garantem uma solução inteira ótima (sequer factível);

Programação inteira: Métodos de solução

- Relaxação linear e arredondamento não garantem uma solução inteira ótima (sequer factível);
- Mas podem nos ajudar com limitantes :)

Programação inteira: Métodos de solução

- Relaxação linear e arredondamento não garantem uma solução inteira ótima (sequer factível);
- Mas podem nos ajudar com limitantes :)
- Poderíamos usar apenas o método simplex para resolver qualquer modelo de programação inteira?

Programação inteira: Métodos de solução

- Relaxação linear e arredondamento não garantem uma solução inteira ótima (sequer factível);
- Mas podem nos ajudar com limitantes :)
- Poderíamos usar apenas o método simplex para resolver qualquer modelo de programação inteira? Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

Programação inteira: Métodos de solução

- Relaxação linear e arredondamento não garantem uma solução inteira ótima (sequer factível);
- Mas podem nos ajudar com limitantes :)
- Poderíamos usar apenas o método simplex para resolver qualquer modelo de programação inteira? Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

- Não!

Programação inteira: Métodos de solução

- Relaxação linear e arredondamento não garantem uma solução inteira ótima (sequer factível);
- Mas podem nos ajudar com limitantes :)
- Poderíamos usar apenas o método simplex para resolver qualquer modelo de programação inteira? Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

- Não! O método simplex funciona apenas em domínios contínuos! (A solução ótima do problema de programação inteira pode não ser um ponto extremo ótimo da relaxação linear).

Programação inteira: Métodos de solução

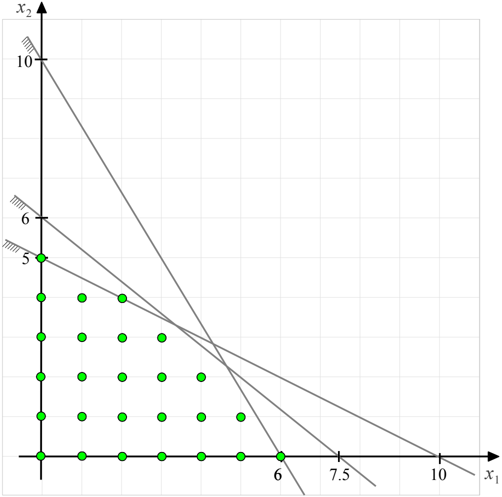
- Relaxação linear e arredondamento não garantem uma solução inteira ótima (sequer factível);
- Mas podem nos ajudar com limitantes :)
- Poderíamos usar apenas o método simplex para resolver qualquer modelo de programação inteira? Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

- Não! O método simplex funciona apenas em domínios contínuos! (A solução ótima do problema de programação inteira pode não ser um ponto extremo ótimo da relaxação linear). E agora?

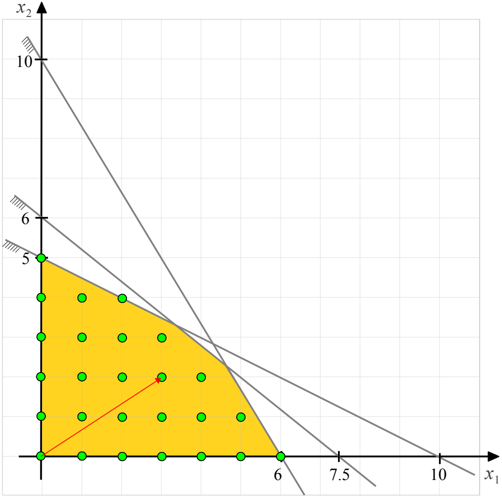
Programação inteira: Métodos de solução

$$
\begin{array}{rl}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



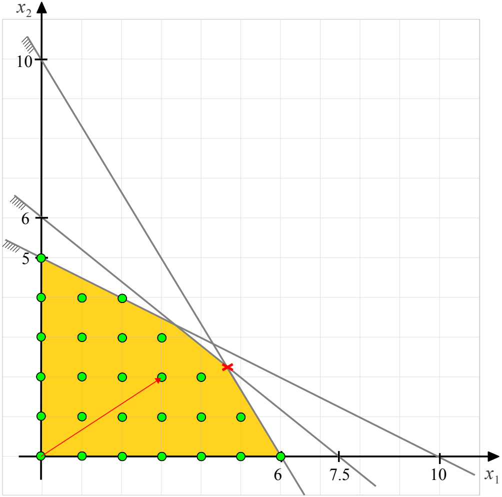
Programação inteira: Métodos de solução

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



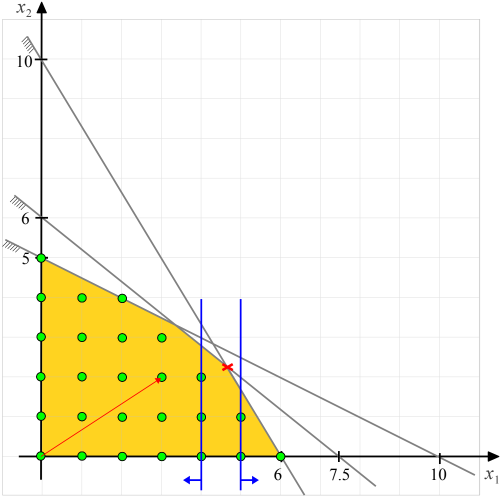
Programação inteira: Métodos de solução

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Programação inteira: Métodos de solução

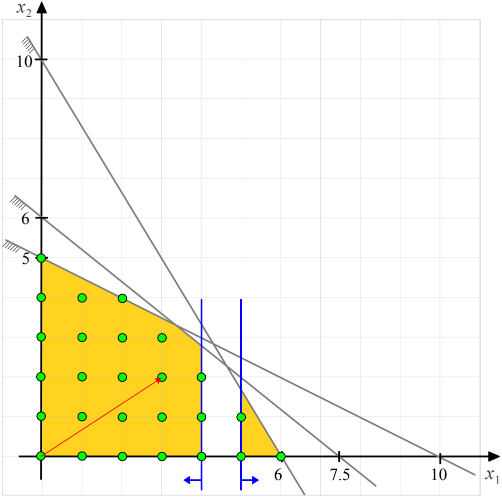
$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\ & 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\ & 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Programação inteira: Métodos de solução

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& {\color{blue} x_1 \leq 4} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \leq 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leq 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \leq 3 \\
& {\color{blue} x_1 \geq 5} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



Método *branch-and-bound*

Método *branch-and-bound*

Branch: Ramificar

Método *branch-and-bound*

Branch: Ramificar

- A ramificaçao consiste em particionar (ou dividir) a região factível de modo a excluir soluções que não satisfaçam as restrições de integralidade;

Método *branch-and-bound*

Branch: Ramificar

- A ramificaçao consiste em particionar (ou dividir) a região factível de modo a excluir soluções que não satisfaçam as restrições de integralidade;

Bound: Limitar

Método *branch-and-bound*

Branch: Ramificar

- A ramificaçao consiste em particionar (ou dividir) a região factível de modo a excluir soluções que não satisfaçam as restrições de integralidade;

Bound: Limitar

- Baseia-se em limitantes inferiores e superiores do valor ótimo para evitar a enumeração explícita de todas as soluções factíveis.

Método *branch-and-bound*

▷ Ailsa Land e Alison Doig, 1960

Left: Ailsa Land, Banff, 1977 (Photograph courtesy of Ailsa Land). Right: Alison Doig, *The Sun*, October 21, 1965. (Courtesy of Alison (Doig) Harcourt)

Método *branch-and-bound*

▷ Ailsa Land e Alison Doig, 1960

- *This paper presents a simple numerical algorithm for the solution of programming problems in which some or all of the variables can take only discrete values. The algorithm requires no special techniques beyond those used in ordinary linear programming, and lends itself to automatic computing.*
- An automatic method of solving discrete programming problems, Econometrica 28(3), pp. 497–520, 1960.

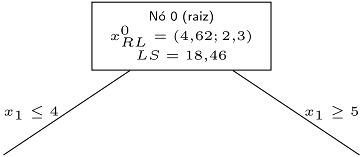
Método *branch-and-bound*

Corresponde a uma árvore de busca:

Nó 0 (raiz) $x^0_{RL} = (4{,}62; 2{,}3)$ $LS = 18{,}46$

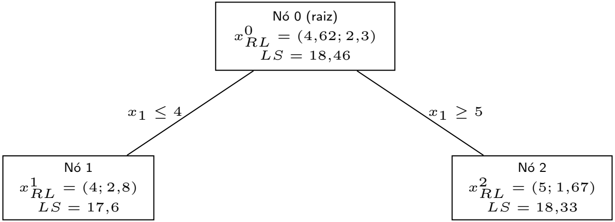
Método *branch-and-bound*

Corresponde a uma árvore de busca:



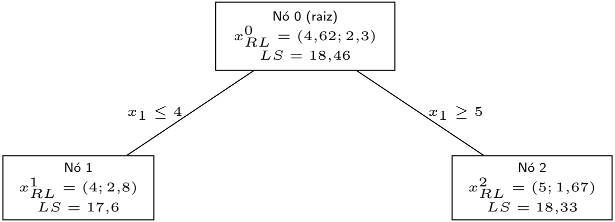
Método *branch-and-bound*

Corresponde a uma árvore de busca:



Método *branch-and-bound*

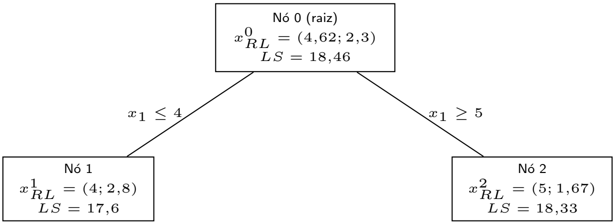
Corresponde a uma árvore de busca:



- Dada uma coordenada $\bar{x}_j$ fracionária, criamos dois novos nós impondo $x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ em um e $x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil$ em outro;

Método *branch-and-bound*

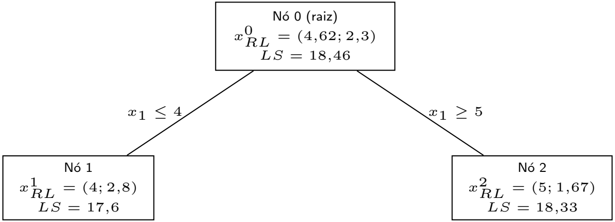
Corresponde a uma árvore de busca:



- Dada uma coordenada $\bar{x}_j$ fracionária, criamos dois novos nós impondo $x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ em um e $x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil$ em outro;
- Em cada nó da árvore, resolvemos uma relaxação do problema;

Método *branch-and-bound*

Corresponde a uma árvore de busca:



- Dada uma coordenada $\bar{x}_j$ fracionária, criamos dois novos nós impondo $x_j \leq \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ em um e $x_j \geq \lceil \bar{x}_j \rceil$ em outro;
- Em cada nó da árvore, resolvemos uma relaxação do problema;
- As relaxações são uma aproximação do problema original e a ideia é que possamos resolvê-las de modo relativamente rápido/fácil.

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;

Método *branch-and-bound*

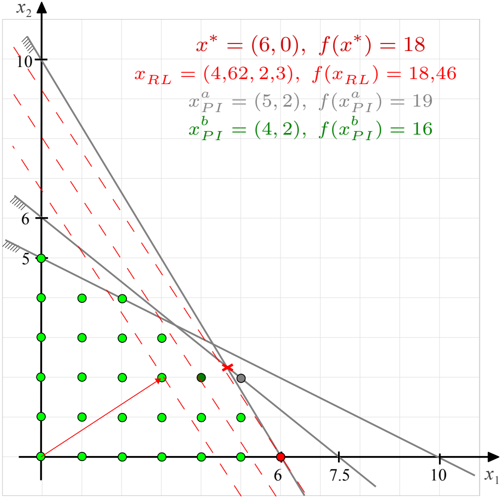
- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$

Método *branch-and-bound*

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} & 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 \le 3 \\
& 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \le 1 \\
& 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2 \le 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{array}
$$



Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
- Em problemas de minimização:

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
- Em problemas de minimização:
  - Solução factível $\Rightarrow$

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
- Em problemas de minimização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante superior (LS);

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
- Em problemas de minimização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
- Em problemas de minimização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
- Em problemas de minimização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
- Solução incumbente: melhor solução inteira (factível) encontrada até o momento;

Método *branch-and-bound*

- Soluções factíveis e relaxações fornecem limitantes que são usados para descartar (podar) nós e garantir que uma solução é otima;
- Em problemas de maximização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
- Em problemas de minimização:
  - Solução factível $\Rightarrow$ limitante superior (LS);
  - Solução da relaxação $\Rightarrow$ limitante inferior (LI);
- Solução incumbente: melhor solução inteira (factível) encontrada até o momento;
- Os nós podem ser descartados por infactibilidade, qualidade (limitante) ou otimalidade.

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?