Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Engenharia de Produção

Otimização Linear Contínua e Discreta (Tópicos Avançados em PCSP)

PPGEP, UFSCar - Semestre 01/2022
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)

Tópico 8.2: Classes de Problemas em Otimização

Objetivos deste tópico

- Conhecer as diferentes classes de problemas de decisão e otimização;
- Compreender essas classificações e sua importância;
- Estudar como provar que um problema é $\mathcal{NP}$-completo e $\mathcal{NP}$-difícil.

Complexidade computacional

▷ Alguns problemas em $\mathcal{P}$

- Problema do caminho mínimo com valores não-negativos:
  - Algoritmo de Dijkstra requer $O(m^2)$ cálculos elementares;
  - A função de complexidade é independente dos valores numéricos.

Complexidade computacional

▷ Alguns problemas em $\mathcal{P}$

- Problema do caminho mínimo com valores não-negativos:
  - Algoritmo de Dijkstra requer $O(m^2)$ cálculos elementares;
  - A função de complexidade é independente dos valores numéricos.
- Problema do caminho mínimo (com alguns valores não-negativos):
  - Algoritmo de Bellman-Ford requer $O(m^3)$ cálculos elementares para ou encontrar um caminho mínimo ou detectar um ciclo de custo negativo;

Complexidade computacional

▷ Alguns problemas em $\mathcal{P}$

- Problema do caminho mínimo com valores não-negativos:
  - Algoritmo de Dijkstra requer $O(m^2)$ cálculos elementares;
  - A função de complexidade é independente dos valores numéricos.
- Problema do caminho mínimo (com alguns valores não-negativos):
  - Algoritmo de Bellman-Ford requer $O(m^3)$ cálculos elementares para ou encontrar um caminho mínimo ou detectar um ciclo de custo negativo;
- Problema de transporte:
  - O algoritmo primal-dual com mudança de escala possui tempo de execução $O(m^3 \log \theta)$.

Problemas de decisão

Estamos interessados em problemas de otimização, mas a teoria de complexidade é baseada em *problemas de decisão* (sim/não);

Problemas de decisão

Estamos interessados em problemas de otimização, mas a teoria de complexidade é baseada em *problemas de decisão* (sim/não);

- Por exemplo: Existe uma rota com distância total menor que K?

Problemas de decisão

Estamos interessados em problemas de otimização, mas a teoria de complexidade é baseada em *problemas de decisão* (sim/não);

- Por exemplo: Existe uma rota com distância total menor que K?
- Observe que é fácil converter um problema de otimização para um problema de decisão.

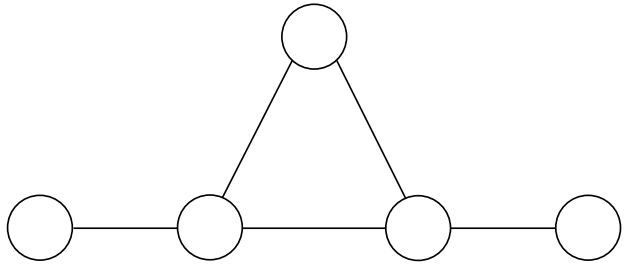
Problemas de decisão

Estamos interessados em problemas de otimização, mas a teoria de complexidade é baseada em *problemas de decisão* (sim/não);

- Por exemplo: Existe uma rota com distância total menor que K?
- Observe que é fácil converter um problema de otimização para um problema de decisão.

Exemplos:

- CLIQUE: Dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k, existe um clique (subgrafo completo) de tamanho k?



Problemas de decisão

Satisfabilidade (*satisfiability*, SAT):

Problemas de decisão

Satisfabilidade (*satisfiability*, SAT):

- Dada uma fórmula booleana, existe uma atribuição de valores às suas variáveis que a torne verdadeira?

Problemas de decisão

Satisfabilidade (*satisfiability*, SAT):

- Dada uma fórmula booleana, existe uma atribuição de valores às suas variáveis que a torne verdadeira?
- A fórmula deve estar na forma normal conjuntiva (ou disjuntiva): cláusulas definidas apenas com operador $\vee$ (sem repetir elementos) e combinadas com operador $\wedge$;

Problemas de decisão

Satisfabilidade (*satisfiability*, SAT):

- Dada uma fórmula booleana, existe uma atribuição de valores às suas variáveis que a torne verdadeira?
- A fórmula deve estar na forma normal conjuntiva (ou disjuntiva): cláusulas definidas apenas com operador $\vee$ (sem repetir elementos) e combinadas com operador $\wedge$;
- Por exemplo: Existem valores booleanos para x_1, x_2, x_3 tais que a expressão $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$ seja verdadeira?

Problemas de decisão

Satisfabilidade (*satisfiability*, SAT):

- Dada uma fórmula booleana, existe uma atribuição de valores às suas variáveis que a torne verdadeira?
- A fórmula deve estar na forma normal conjuntiva (ou disjuntiva): cláusulas definidas apenas com operador $\vee$ (sem repetir elementos) e combinadas com operador $\wedge$;
- Por exemplo: Existem valores booleanos para x_1, x_2, x_3 tais que a expressão $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$ seja verdadeira?
  - Sim! Basta atribuirmos $x_1 = V$ e $x_2 = V$ (x_3 qualquer).

Problemas de decisão

- Classes de problemas

Classe $\mathcal{P}$ (*polynomial time*)

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

Classe $\mathcal{P}$ (*polynomial time*)

- Vimos que $\mathcal{P}$ é a classe de problemas (de decisão!) que podem ser resolvidos em **tempo polinomial**;
- Algoritmos com tempo $O(n^2)$, $O(n \log n)$, $O(n^{232})$, etc.

Problemas de decisão

- Classes de problemas

Classe $\mathcal{NP}$

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

Classe $\mathcal{NP}$ (*nondeterministic polynomial time*)

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

Classe $\mathcal{NP}$ (*nondeterministic polynomial time*)

- Problemas de decisão para os quais qualquer resultado **sim** possui um certificado ("solução") de tamanho polinomial que pode ser **checado em tempo polinomial**.

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

Classe $\mathcal{NP}$ (*nondeterministic polynomial time*)

- Problemas de decisão para os quais qualquer resultado **sim** possui um certificado ("solução") de tamanho polinomial que pode ser **checado em tempo polinomial**.
- Assim, sempre que a decisão é **sim**, é possível verificar a resposta em tempo polinomial;

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

Classe $\mathcal{NP}$ (*nondeterministic polynomial time*)

- Problemas de decisão para os quais qualquer resultado **sim** possui um certificado ("solução") de tamanho polinomial que pode ser **checado em tempo polinomial**.
- Assim, sempre que a decisão é **sim**, é possível verificar a resposta em tempo polinomial;
- $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$;

Problemas de decisão

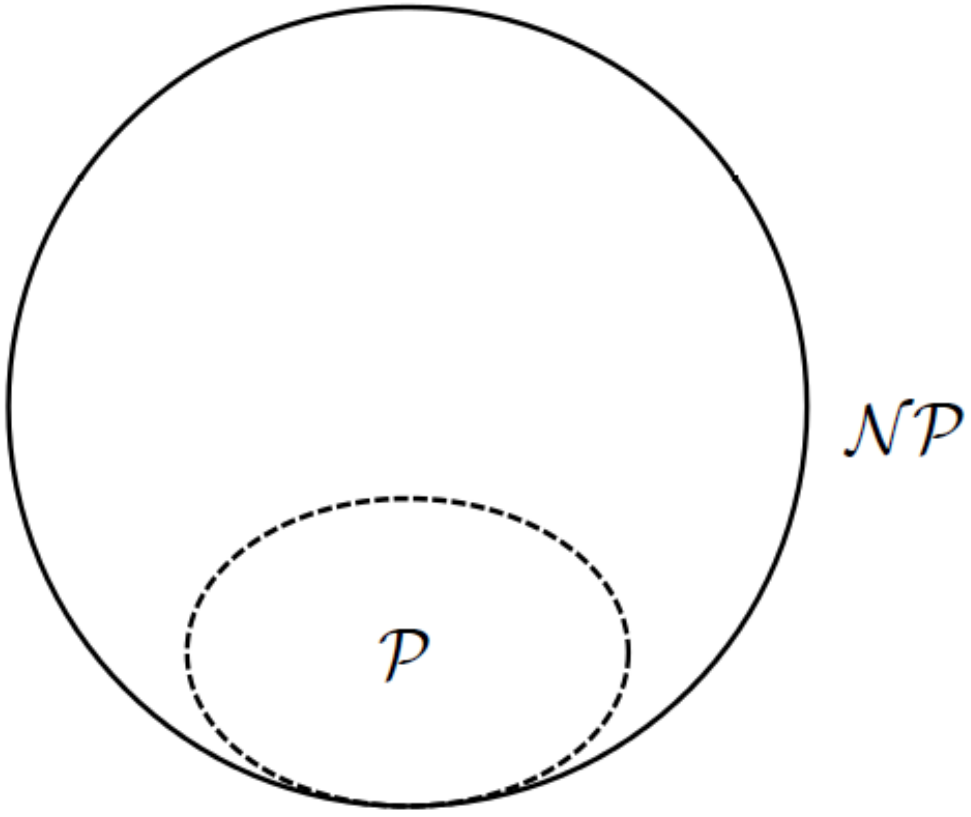
▷ Classes de problemas

Classe $\mathcal{NP}$ (*nondeterministic polynomial time*)

- Problemas de decisão para os quais qualquer resultado **sim** possui um certificado ("solução") de tamanho polinomial que pode ser **checado em tempo polinomial**.
- Assim, sempre que a decisão é **sim**, é possível verificar a resposta em tempo polinomial;
- $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$;
- *Nondeterministic*: solucionados em tempo polinomial em uma Máquina de Turing não-determinística;

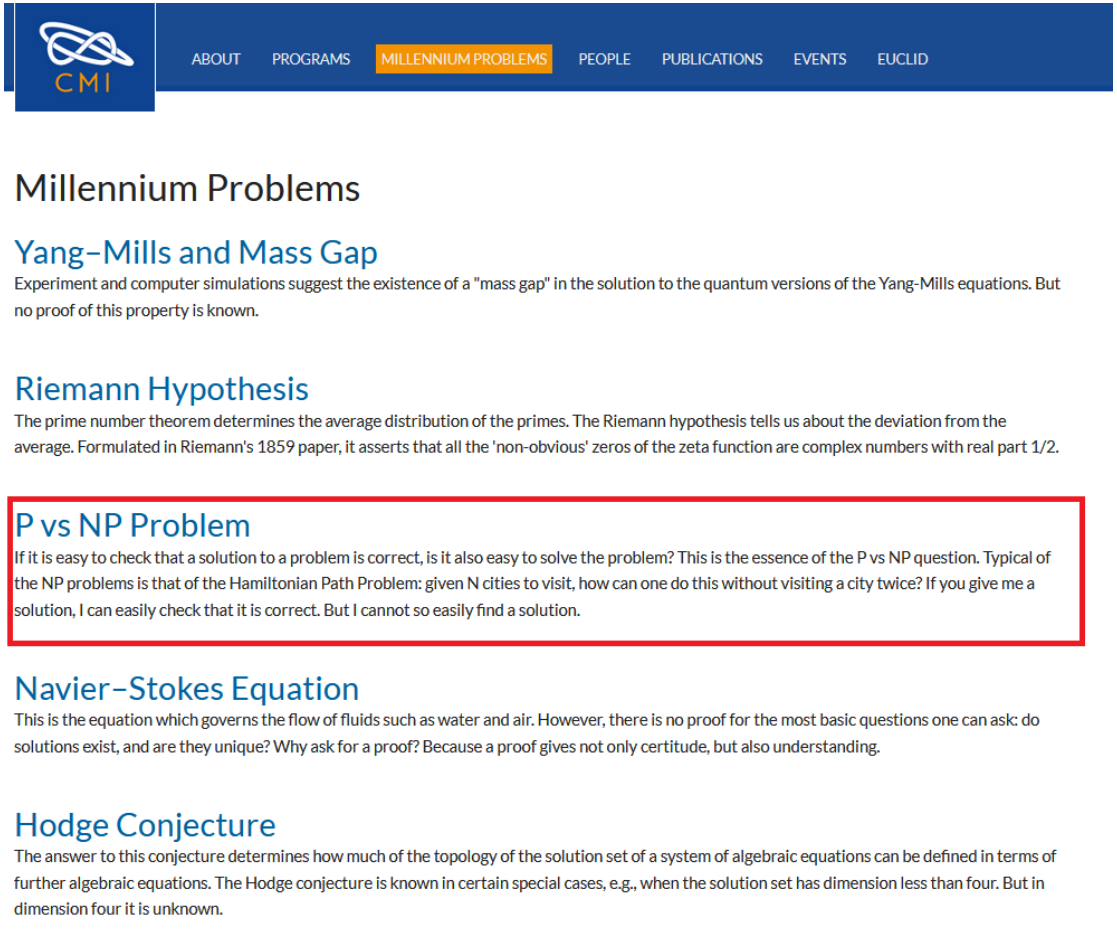
Classes de problemas

- Diagrama



Quem quer ser um milionário?

- $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?



`http://www.claymath.org/millennium-problems`

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Um problema A é **redutível** a um problema B ($A \propto B$) se para qualquer instância d_A de A podemos construir uma instância d_B de B em tempo polinomial de modo que d_A resulta em **sim** para A se, e somente se, d_B resulta em **sim** para B.

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Um problema A é **redutível** a um problema B ($A \propto B$) se para qualquer instância d_A de A podemos construir uma instância d_B de B em tempo polinomial de modo que d_A resulta em **sim** para A se, e somente se, d_B resulta em **sim** para B.

- Um problema B é $\mathcal{NP}$-**completo** se (1) $B \in \mathcal{NP}$; (2) dado qualquer $A \in \mathcal{NP}$, então $A \propto B$;

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Um problema A é **redutível** a um problema B ($A \propto B$) se para qualquer instância d_A de A podemos construir uma instância d_B de B em tempo polinomial de modo que d_A resulta em **sim** para A se, e somente se, d_B resulta em **sim** para B.

- Um problema B é $\mathcal{NP}$-**completo** se (1) $B \in \mathcal{NP}$; (2) dado qualquer $A \in \mathcal{NP}$, então $A \propto B$;
- "os problemas mais difíceis em $\mathcal{NP}$";

Problemas de decisão

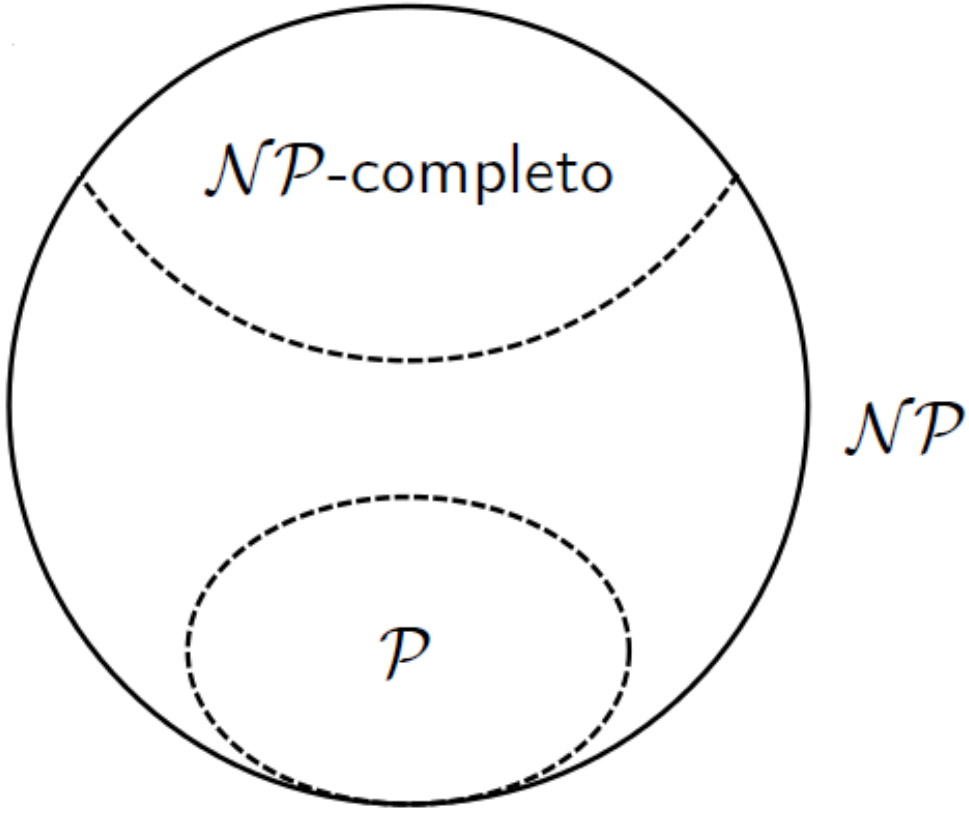
▷ Classes de problemas

- Um problema A é **redutível** a um problema B ($A \propto B$) se para qualquer instância d_A de A podemos construir uma instância d_B de B em tempo polinomial de modo que d_A resulta em **sim** para A se, e somente se, d_B resulta em **sim** para B.

- Um problema B é $\mathcal{NP}$-**completo** se (1) $B \in \mathcal{NP}$; (2) dado qualquer $A \in \mathcal{NP}$, então $A \propto B$;
- "os problemas mais difíceis em $\mathcal{NP}$";
- Se houver um algoritmo em tempo polinomial para um deles, então haverá um algoritmo em tempo polinomial para **todos** em $\mathcal{NP}$!

Classes de problemas

- Diagrama



Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Dados A e B em $\mathcal{NP}$, de modo que $A \propto B$:

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Dados A e B em $\mathcal{NP}$, de modo que $A \propto B$:
  - Se $B \in \mathcal{P}$, então $A \in \mathcal{P}$;

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Dados A e B em $\mathcal{NP}$, de modo que $A \propto B$:
  - Se $B \in \mathcal{P}$, então $A \in \mathcal{P}$;
  - Se $A \in \mathcal{NP}$-completo, então $B \in \mathcal{NP}$-completo;

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Dados A e B em $\mathcal{NP}$, de modo que $A \propto B$:
  - Se $B \in \mathcal{P}$, então $A \in \mathcal{P}$;
  - Se $A \in \mathcal{NP}$-completo, então $B \in \mathcal{NP}$-completo;
- Logo, para provar que um problema B é $\mathcal{NP}$-completo, partimos de um problema A que já sabemos ser $\mathcal{NP}$-completo e então provamos que $A \propto B$.

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Dados A e B em $\mathcal{NP}$, de modo que $A \propto B$:
  - Se $B \in \mathcal{P}$, então $A \in \mathcal{P}$;
  - Se $A \in \mathcal{NP}$-completo, então $B \in \mathcal{NP}$-completo;
- Logo, para provar que um problema B é $\mathcal{NP}$-completo, partimos de um problema A que já sabemos ser $\mathcal{NP}$-completo e então provamos que $A \propto B$.
- *Stephen Cook, 1971*: SAT é $\mathcal{NP}$-completo.

Problemas de decisão

▷ Classes de problemas

- Dados A e B em $\mathcal{NP}$, de modo que $A \propto B$:
  - Se $B \in \mathcal{P}$, então $A \in \mathcal{P}$;
  - Se $A \in \mathcal{NP}$-completo, então $B \in \mathcal{NP}$-completo;
- Logo, para provar que um problema B é $\mathcal{NP}$-completo, partimos de um problema A que já sabemos ser $\mathcal{NP}$-completo e então provamos que $A \propto B$.
- *Stephen Cook, 1971*: SAT é $\mathcal{NP}$-completo.
- Daí para outros problemas, fazemos por exemplo: SAT $\propto$ CLIQUE; CLIQUE $\propto$ VERTEX PACKING; etc.

SAT $\propto$ CLIQUE

▷ Ideia da prova

- Vamos construir um grafo a partir da fórmula booleana (em tempo polinomial!);
- Seja k o número de cláusulas (expressões entre parênteses);
- Para cada elemento na fórmula (qualquer x_i ou $\neg x_i$) crie um vértice (se o mesmo elemento aparecer mais de uma vez, cada cópia resulta em um vértice);
- Para cada par de elementos em cláusulas diferentes *que podem ser Verdadeiros ao mesmo tempo*, introduzimos uma aresta entre eles;

SAT $\propto$ CLIQUE

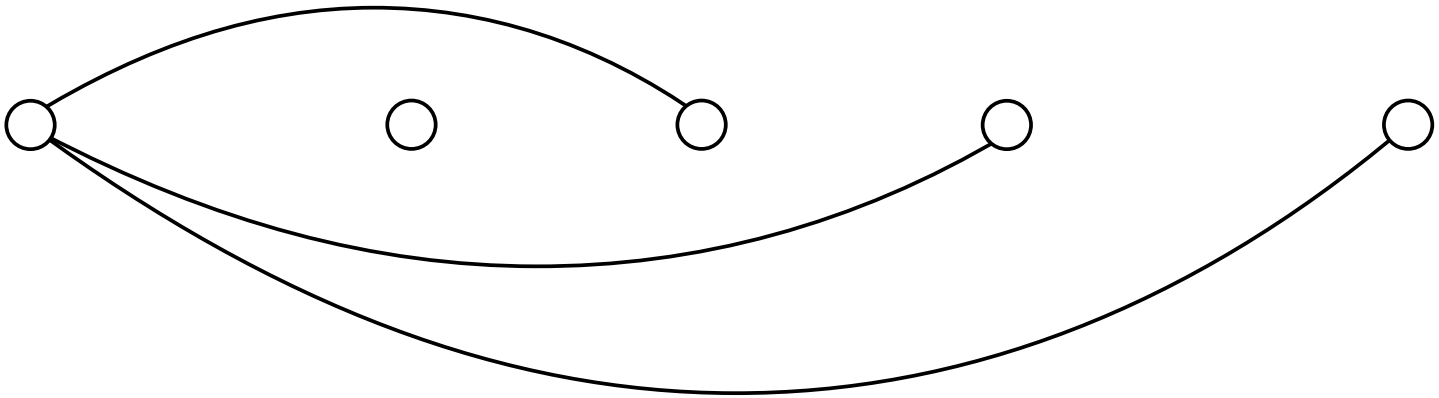
▷ Ideia da prova

$$x_1 \quad \wedge \quad (\quad \neg\, x_1 \quad \vee \quad x_2 \quad \vee \quad \neg\, x_3 \quad) \quad \wedge \quad x_3$$

SAT $\propto$ CLIQUE

▷ Ideia da prova

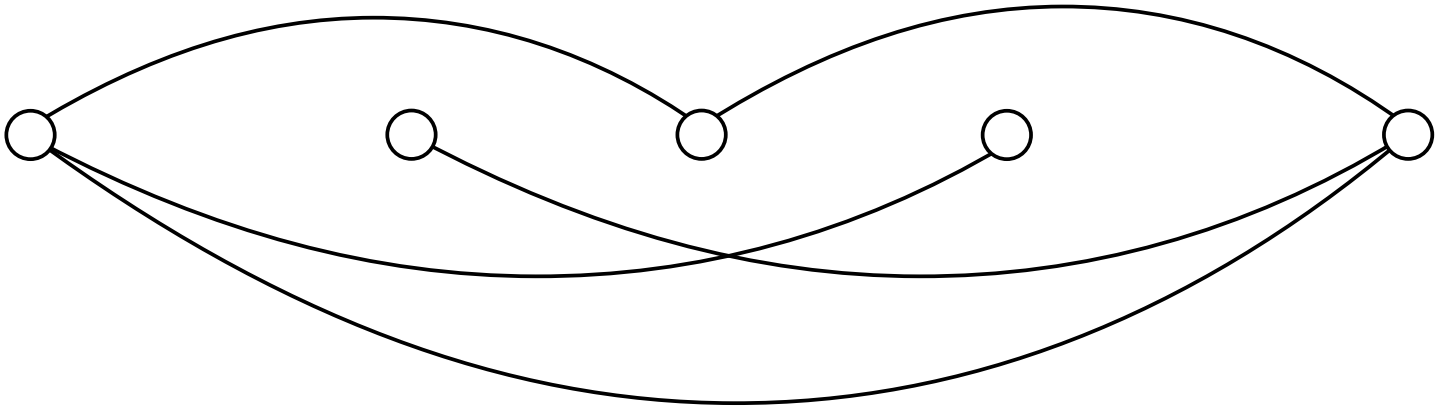
$$x_1 \quad \wedge \quad (\quad \neg\, x_1 \quad \vee \quad x_2 \quad \vee \quad \neg\, x_3 \quad) \quad \wedge \quad x_3$$



SAT $\propto$ CLIQUE

▷ Ideia da prova

$$x_1 \quad \wedge \quad (\quad \neg\, x_1 \quad \vee \quad x_2 \quad \vee \quad \neg\, x_3 \quad) \quad \wedge \quad x_3$$



SAT $\propto$ CLIQUE

▷ Ideia da prova

- Observe que um clique no grafo construído corresponde a um conjunto de elementos, cada um em uma cláusula diferente, e que podem ser definidos como Verdadeiro ao mesmo tempo;
- Logo, um clique do tamanho do número de clásulas corresponde a uma atribuição que avalia a fórmula como Verdadeira.

Problemas de otimização

- As classes que vimos são para problemas de **decisão**;

Problemas de otimização

- As classes que vimos são para problemas de **decisão**;
- Como vimos, é fácil fazermos um paralelo entre otimização e decisão, embora sejam problemas diferentes;

Problemas de otimização

- As classes que vimos são para problemas de **decisão**;
- Como vimos, é fácil fazermos um paralelo entre otimização e decisão, embora sejam problemas diferentes;
- Existe uma classificação que envolve outros tipos de problemas, além de problemas de decisão, conhecida como $\mathcal{NP}$-**difícil** ($\mathcal{NP}$-*hard*);

Problemas de otimização

- As classes que vimos são para problemas de **decisão**;
- Como vimos, é fácil fazermos um paralelo entre otimização e decisão, embora sejam problemas diferentes;
- Existe uma classificação que envolve outros tipos de problemas, além de problemas de decisão, conhecida como $\mathcal{NP}$-**difícil** ($\mathcal{NP}$-*hard*);
- "Tão difícil quanto o problema mais difícil em $\mathcal{NP}$";

Problemas de otimização

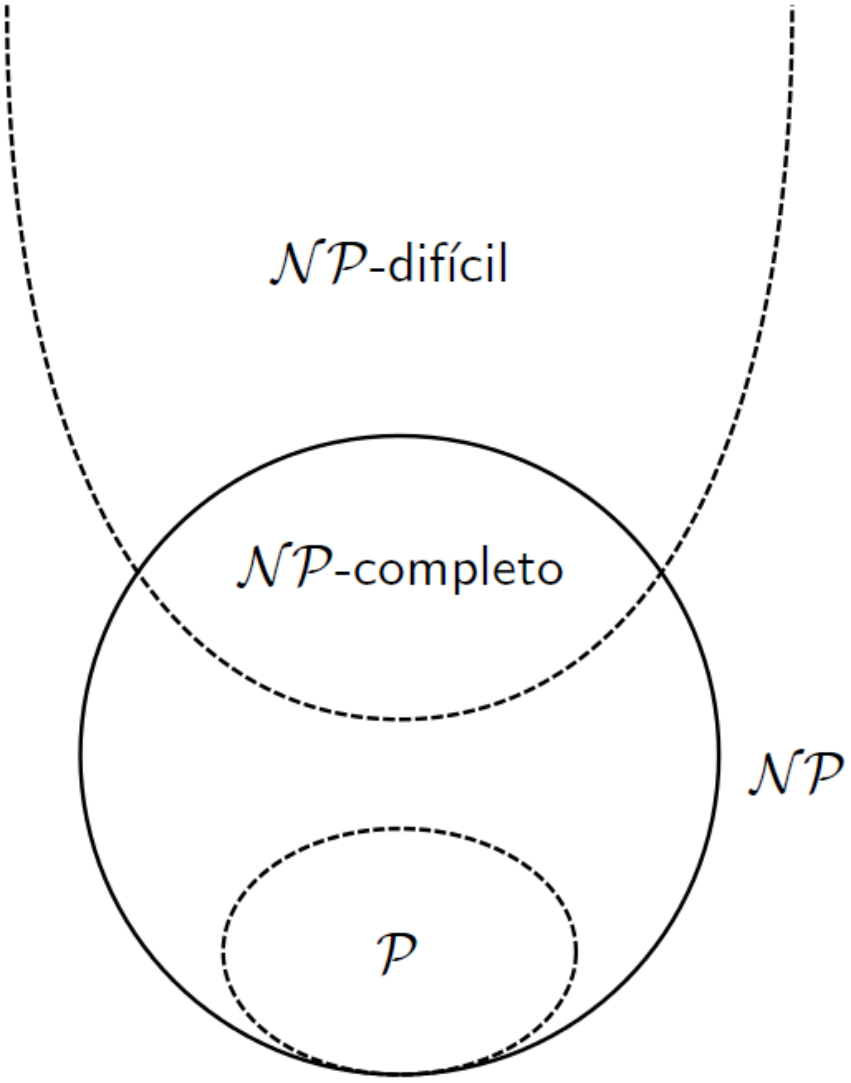
- As classes que vimos são para problemas de **decisão**;
- Como vimos, é fácil fazermos um paralelo entre otimização e decisão, embora sejam problemas diferentes;
- Existe uma classificação que envolve outros tipos de problemas, além de problemas de decisão, conhecida como $\mathcal{NP}$-**difícil** ($\mathcal{NP}$-*hard*);
- "Tão difícil quanto o problema mais difícil em $\mathcal{NP}$";
- Atenção: Um problema $\mathcal{NP}$-difícil não precisa estar em $\mathcal{NP}$!

Problemas de otimização

- As classes que vimos são para problemas de **decisão**;
- Como vimos, é fácil fazermos um paralelo entre otimização e decisão, embora sejam problemas diferentes;
- Existe uma classificação que envolve outros tipos de problemas, além de problemas de decisão, conhecida como $\mathcal{NP}$-**difícil** ($\mathcal{NP}$-*hard*);
- "Tão difícil quanto o problema mais difícil em $\mathcal{NP}$";
- Atenção: Um problema $\mathcal{NP}$-difícil não precisa estar em $\mathcal{NP}$!
- Um problema $\mathcal{NP}$-difícil que está em $\mathcal{NP}$, é um problema $\mathcal{NP}$-completo.

Classes de problemas

- Diagrama



Classes de problemas

- https://pt.wikipedia.org/wiki/NP-difícil

Convenção de nomeação NP [editar | editar código-fonte]

O sistema de nomeação da família NP é confuso: os problemas NP-difíceis, não são todos NP, a despeito de ter *NP* como o prefixo do seu nome da classe. No entanto, os nomes estão agora estabelecidos e improváveis de mudar. Por outro lado, o sistema de nomeação *NP-* tem algum sentido mais profundo, porque a família NP é definida em relação à classe NP:

NP-difícil

Tão difíceis quanto os problemas mais difíceis em NP. Tais problemas não precisam estar em NP, na verdade, eles nem precisam ser obrigatoriamente problemas de decisão.

NP-completo

Estes são os problemas mais difíceis em NP. Tais problemas são NP-difíceis e em NP.

$\mathcal{NP}$-difícil

- Precisamos do conceito de oráculo: Dado um problema de decisão ou otimização A, dizemos que um algoritmo possui A como oráculo quando esse algoritmo resolve uma instância de A com uma única instrução;

$\mathcal{NP}$-difícil

- Precisamos do conceito de oráculo: Dado um problema de decisão ou otimização A, dizemos que um algoritmo possui A como oráculo quando esse algoritmo resolve uma instância de A com uma única instrução;
- Um problema A é $\mathcal{NP}$-difícil se existe um algoritmo de tempo polinomial para um problema B $\mathcal{NP}$-completo quando esse algoritmo tem A como oráculo;

$\mathcal{NP}$-difícil

- Precisamos do conceito de oráculo: Dado um problema de decisão ou otimização A, dizemos que um algoritmo possui A como oráculo quando esse algoritmo resolve uma instância de A com uma única instrução;
- Um problema A é $\mathcal{NP}$-difícil se existe um algoritmo de tempo polinomial para um problema B $\mathcal{NP}$-completo quando esse algoritmo tem A como oráculo;
- $\mathcal{NP}$-difícil em geral se refere a problemas de otimização cujo problema de decisão correspondente é $\mathcal{NP}$-completo;

$\mathcal{NP}$-difícil

- Precisamos do conceito de oráculo: Dado um problema de decisão ou otimização A, dizemos que um algoritmo possui A como oráculo quando esse algoritmo resolve uma instância de A com uma única instrução;
- Um problema A é $\mathcal{NP}$-difícil se existe um algoritmo de tempo polinomial para um problema B $\mathcal{NP}$-completo quando esse algoritmo tem A como oráculo;
- $\mathcal{NP}$-difícil em geral se refere a problemas de otimização cujo problema de decisão correspondente é $\mathcal{NP}$-completo;
- O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é $\mathcal{NP}$-difícil. Quem conseguir achar um algoritmo de tempo polinomial pra resolvê-lo fica milionário (e muito famoso!).

PCV é $\mathcal{NP}$-difícil

▷ Ideia da prova

- Problema de decisão relacionado ao PCV: (1) Dado um grafo completo e um número k, existe uma rota factível de custo no máximo k?

PCV é $\mathcal{NP}$-difícil

▷ Ideia da prova

- Problema de decisão relacionado ao PCV: (1) Dado um grafo completo e um número k, existe uma rota factível de custo no máximo k?
- Problema de decisão $\mathcal{NP}$-completo: (2) Dado um grafo $G(V, E)$ **qualquer**, existe um ciclo Hamiltoniano nesse grafo?

PCV é $\mathcal{NP}$-difícil

▷ Ideia da prova

- Problema de decisão relacionado ao PCV: (1) Dado um grafo completo e um número k, existe uma rota factível de custo no máximo k?
- Problema de decisão $\mathcal{NP}$-completo: (2) Dado um grafo $G(V, E)$ **qualquer**, existe um ciclo Hamiltoniano nesse grafo?
- Basta mostrar que (2) é redutível a (1):

PCV é $\mathcal{NP}$-difícil

▷ Ideia da prova

- Problema de decisão relacionado ao PCV: (1) Dado um grafo completo e um número k, existe uma rota factível de custo no máximo k?
- Problema de decisão $\mathcal{NP}$-completo: (2) Dado um grafo $G(V, E)$ **qualquer**, existe um ciclo Hamiltoniano nesse grafo?
- Basta mostrar que (2) é redutível a (1): definir custo 1 para as arestas em E;

PCV é $\mathcal{NP}$-difícil

▷ Ideia da prova

- Problema de decisão relacionado ao PCV: (1) Dado um grafo completo e um número k, existe uma rota factível de custo no máximo k?
- Problema de decisão $\mathcal{NP}$-completo: (2) Dado um grafo $G(V, E)$ **qualquer**, existe um ciclo Hamiltoniano nesse grafo?
- Basta mostrar que (2) é redutível a (1): definir custo 1 para as arestas em E; adicionar novas arestas com custo 2 até o grafo ficar completo;

PCV é $\mathcal{NP}$-difícil

▷ Ideia da prova

- Problema de decisão relacionado ao PCV: (1) Dado um grafo completo e um número k, existe uma rota factível de custo no máximo k?
- Problema de decisão $\mathcal{NP}$-completo: (2) Dado um grafo $G(V, E)$ **qualquer**, existe um ciclo Hamiltoniano nesse grafo?
- Basta mostrar que (2) é redutível a (1): definir custo 1 para as arestas em E; adicionar novas arestas com custo 2 até o grafo ficar completo; usar (1) como oráculo com $k = n$.

PCV é $\mathcal{NP}$-difícil

▷ Ideia da prova

- Problema de decisão relacionado ao PCV: (1) Dado um grafo completo e um número k, existe uma rota factível de custo no máximo k?
- Problema de decisão $\mathcal{NP}$-completo: (2) Dado um grafo $G(V, E)$ **qualquer**, existe um ciclo Hamiltoniano nesse grafo?
- Basta mostrar que (2) é redutível a (1): definir custo 1 para as arestas em E; adicionar novas arestas com custo 2 até o grafo ficar completo; usar (1) como oráculo com $k = n$.
- Observe que esses passos são feitos em tempo polinomial;

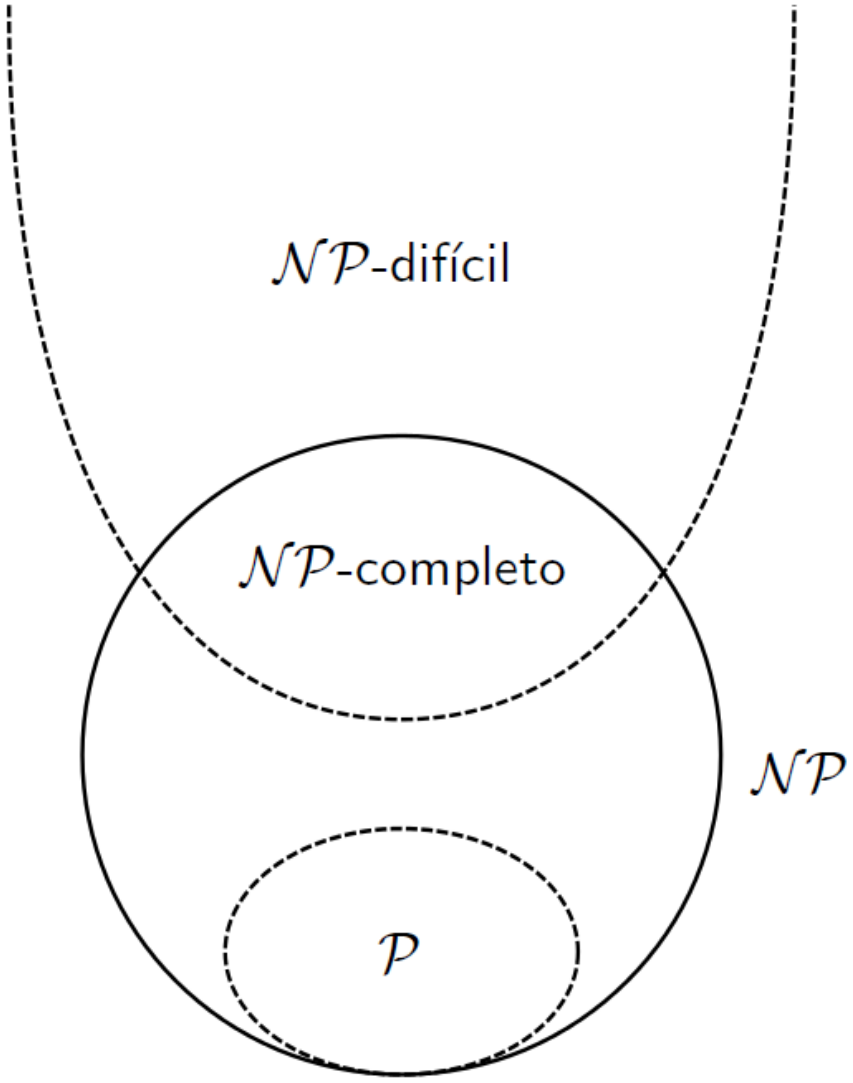
PCV é $\mathcal{NP}$-difícil

▷ Ideia da prova

- Problema de decisão relacionado ao PCV: (1) Dado um grafo completo e um número k, existe uma rota factível de custo no máximo k?
- Problema de decisão $\mathcal{NP}$-completo: (2) Dado um grafo $G(V, E)$ **qualquer**, existe um ciclo Hamiltoniano nesse grafo?
- Basta mostrar que (2) é redutível a (1): definir custo 1 para as arestas em E; adicionar novas arestas com custo 2 até o grafo ficar completo; usar (1) como oráculo com $k = n$.
- Observe que esses passos são feitos em tempo polinomial;
- Além disso, se a resposta do problema (1) é **sim**, então existe um ciclo que visita todos os nós do grafo uma única vez e usando as arestas originais de G (o contrário também é verdadeiro).

Classes de problemas

- Diagrama



- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?